2

INSTITUZIONI

DELLE

TRIGONOMETRIE RETTILINEA E SFERICA

DI

GABRIELE FERGOLA

PROFESSORE DI ASTRONOMIA NELLA REGIA UNIVERSITA' DI NAPOLI.

NAPOLI

DALLA TIPOGRAFIA DEL SEBETO

1845

INSTITUZIONI

DELLA

TRIGONOMETRIA RETTILINEA

CAP. I.

DELLA MISURA DEGLI ANGOLI.

§. 1. PRINCIPIO. La circonferenza di ogni cerchio si suppone dai Trigonometri divisa in 360 parti uguali, che diconsi *gradi*: e ciascuno di questi intendesi pur diviso in 60 parti uguali, che chiamansi *minuti primi*, o semplicemente *primi*. Ogni minuto primo poi supponesi diviso in 60 parti uguali, che diconsi *minuti secondi* o *secondi*. E nello stesso modo s' intendono divisi i minuti secondi per ottenere i *minuti terzi* o i *terzi*, ec.

§. 2. *Cor. I.* Dunque la semicirconferenza di un qualunque cerchio dovrà contenere 180 gradi: e 'l quadrante, ch' è la quarta parte dell' intiera circonferenza, dovrà contenerne 90.

§. 3. *Cor. II.* E poichè gli angoli, che sono al centro di uno stesso cerchio, o di uguali cerchi seguono la ragione degli archi su cui poggiano (33 El. VI.); dovranno essere anche quegli angoli nella ragione de' numeri denominati, che rispettivamente ne dinotano i gradi,

primi, secondi, ec., che si contengono nei medesimi archi. E perciò *di più angoli posti al centro di uno stesso o di uguali cerchi assumesi per unità della misura quello, che poggia sull'arco di un grado : e le frazioni della medesima unità si dinotano per minuti primi, minuti secondi, ec.*

§. 4. *Scol.* I gradi della circonferenza di qualsivoglia cerchio sogliono dinotarsi ponendo un zero a destra ed un pò al di sopra del numero, che li rappresenta : ed i minuti primi, secondi, ec. si dinotano con uno, due, ec. apici alla destra ed un pò al di sopra di quei numeri, da cui rispettivamente sono dinotati. Così, per esempio, volendo dinotare un arco di 63 gradi, 37 minuti primi, 53 minuti secondi, 24 terzi, ec., si dovrà scrivere $63^{\circ}.\ 37^{I}.\ 53^{II}.\ 24^{III}$, ec. Ma i minuti terzi, quarti, ec. sogliono esibirsi per decimi, centesimi, ec. di secondi.

PROP. I. TEOR.

§. 5. *Se prendasi per centro il vertice di un angolo rettilineo* (fig. 1.) ACB, *e con diversi intervalli* CA, CF *si descrivano tra i lati di quell'angolo più archi circolari* AB, FE; *tali archi dovranno contenere un medesimo numero di gradi, minuti primi, secondi, ec.*

Dal punto C si elevi alla CA la perpendicolare CD, e si compiscano i quadranti ABD, FEL. Dovrà stare (33. El. VI.) l'angolo FCE all'altro FCL come l'arco FE al quadrante FEL, e l'angolo ACB all'altro ACD come l'arco AB al quadrante ABD. Ma l'angolo FCE

sta all' altro FCL come l' angolo ACB all'angolo ACD. Dunque dee stare l' arco FE al quadrante FEL come l' arco AB al quadrante ABD. E quindi contenendosi 90° in ciascuno dei due quadranti FEL, ABD; negli archi AB, FE (14 El. V) vi si dovrà contenere un medesimo numero di gradi, minuti primi, secondi, ec. C. B. D.

§. 6. *Cor. I.* Dunque di ciascun angolo può assumersi per unità della misura quello, che avendo il vertice al centro di un qualunque cerchio sottende un arco uguale alla 360ᵐᵃ parte della periferia, e che per questa ragione dicesi *angolo di un grado.* Le frazioni poi della medesima unità si dinotano per quegli angoli, che avendo i loro vertici al centro del cerchio sono opposti ad archi, che nella stessa periferia sono parti del grado. E perciò le frazioni dell' angolo di un grado vengono dette *angoli di minuti primi*, *secondi* ec.

§. 7. *Cor. II.* E quindi ciascun angolo dee contenere lo stesso numero di gradi, minuti primi, secondi, ec. che sono nell' arco del cerchio, che ha per centro il vertice, ed è contenuto tra i lati di quell' angolo (§. 5.)

§. 8. *Cor. III.* La somma degli angoli di un triangolo rettilineo dee pareggiare 180°.

§. 9. *Cor. IV.* Il perchè conoscendosi i numeri, che ne dinotano due angoli di un triangolo rettilineo, si farà noto il valore numerico del rimanente angolo, sottraendo la somma di que' due angoli da 180°.

§. 10. *Cor. V.* Se dentro e fuori di un triangolo ABC si menino (*fig.* 2.) più rette DE, FG, HK, ec. parallele ad uno de' lati AC di

esso; i triangoli DBE, FBG, HBK, ec. che ne risultano, saranno tutti equiangoli all'altro ABC. Dunque se diensi due angoli di un triangolo, e quindi anche il rimanente (§. 9.), non si potranno da questi rinvenire le lunghezze dei lati di quello.

PROP. II. TEOR.

§. 11. *Gli angoli posti ai centri di due cerchi disuguali sono tra loro nella ragion composta della diretta degli archi su cui poggiano e dell' inversa de' raggi di quei cerchi.*

Sieno (*fig.* 3.) ACB, FCE due angoli posti al centro comune C dei due cerchi disuguali AGB, FED, e che abbiano sopprapposti i lati CA, CF: e 'l lato CE del secondo di tali angoli si prolunghi finchè ne incontri la periferia del cerchio AGB nel punto G. Dovrà stare (33 El. VI.) l' angolo BCA all' altro GCA, o sia l' angolo BCA all' angolo ECF come l' arco AB all' arco AG. Ma (23 El. VI.) l' arco AB sta all' altro AG nella ragion composta delle ragioni di AB ad FE, e di FE ad AG: ed è poi la ragione di FE ad AG uguale a quella di CF a CA. Dunque dee stare l' angolo BCA all' altro ECF nella ragion composta delle regioni di BA ad FE, e di CF a CA. Vale a dire, che gli angoli ec. C.B.D.

§. 12. *Cor.* Si dinoti con R il raggio del cerchio AGB, e si ponga il raggio CF del cerchio FED uguale ad 1, e l' angolo FCE sia di 1.° Sarà pure l' arco FE di 1.° Il perchè dovrà essere la ragione composta delle ragioni dell' arco AB a quello di 1°, preso nel cerchio FED, e

del raggio 1 di questo al raggio R del cerchio ACB uguale a quella dell' angolo ACB all' angolo di 1°; o sia dovrà stare AB . 1: 1° . R:: ACB: 1°. Ma la prima ragione di questa analogia adegua l' altra di $\frac{AB}{R}$: 1°. Dunque dee stare $\frac{AB}{R}$: 1°:: ACB: 1°. E quindi dev' essere l' arco AB diviso pel raggio R uguale all' angolo ACB (9. El. V.). Vale a dire, che *ogni angolo posto al centro di un cerchio adegua l'arco, che l'è opposto nel medesimo cerchio, diviso pel raggio.*

CAP. II.

DEL SOGGETTO DELLA TRIGONOMETRIA RETTILINEA, E DELLE LINEE TRIGONOMETRICHE.

§. 13. *Def. I.* I numeri, che rispettivamente ne dinotano i valori degli angoli e dei lati di un triangolo, si dicono *parti del triangolo.*

§. 14. *Def. II.* La *risoluzione* di un triangolo rettilineo consiste nel determinare tre parti di esso, essendo note le rimanenti; purchè queste non sieno i tre soli angoli della figura (§. 10).

§. 15. *Def. III.* La *Trigonometria piana* o *rettilinea* è quella scienza, che ha per soggetto la risoluzione de' triangoli rettilinei.

§. 16. *Scol.* Qualora di un triangolo ne sono note tre parti, tra le quali vi si contenga un lato, e pei vertici degli angoli di esso vi passi un piano, sul quale possano distendersi i suoi lati; la determinazione delle parti ignote del triangolo è di facile conseguimento, come ne

appare dagli Elementi di Euclide. Ma se i vertici degli angoli del triangolo sieno tre punti isolati dello spazio; in tal caso la determinazione delle parti ignote di esso, non può colla medesima facilità conseguirsi. E per questa ragione conviene stabilire alcune regole per la risoluzione del triangolo.

§. 17. *Def. IV.* Il *complemento* di un arco circolare è la differenza tra esso arco e 'l quadrante: e 'l *supplemento* di un arco è la differenza tra esso arco e la semicirconferenza.

§. 18. *Def. V.* Il *seno di un arco* è la perpendicolare, che dall' estremo dell' arco si abbassa sul raggio, che passa per l' altro estremo.

§. 19. *Def. VI.* La *tangente di un arco* è quella retta, che tocca l' arco in un suo estremo e si prolunga insino al raggio condottovi per l' altro estremo.

§. 20. *Def. VII.* Il raggio di un cerchio prolungato insino alla tangente di un arco chiamasi *segante di tale arco.*

§. 21. *Def. VIII.* Il *coseno di un arco* è il seno del complemento di esso. La *cotangente di un arco* è la tangente del suo complemento. E la *cosegante di un arco* è la segante del complemento dello stesso arco.

§. 22. *Def. IX.* Il *seno-verso di un arco* è le parte del diametro, che trovasi tra l' estremo dell' arco ed il seno dello stesso arco.

§. 23. *Def. X.* Il seno di un arco, la tangente, la segante, il coseno, la cotangente, e la cosegante si dicono *linee trigonometriche.*

§. 24. *Scol.* Le linee trigonometriche di un arco appartengono eziandio all' angolo formato al centro del cerchio, e ch' è opposto a quell' arco.

§. 25. *Diensi il raggio di un cerchio e 'l seno, e 'l coseno di un qualunque arco di esso; determinare le altre linee trigonometriche dello stesso arco.*

Sieno rispettivamente (*fig.* 4.) EQ, EN il seno e 'l coseno dell' arco circolare AE, e sia RA il raggio del cerchio ABCD, cui appartiene il medesimo arco AE. Intanto per gli estremi A e B del quadrante AB si menino le due tangenti AM, BL, che incontrino il raggio RE prolungato nei rispettivi punti M ed L, e si dinoti con R il raggio del cerchio ABCD, e con φ l' arco AE. Sarà EQ=sen.φ, QR=cos.φ, AM= tang.φ, BL =cotan.φ, RM=seg.φ, ed RL=coseg.φ.
Or, a cagione de' triangoli simili RQE, RAM, essendo RQ : QE::RA : AM, ed RQ : RE::RA : RM; sarà nei simboli cos. φ : sen.φ::R:tang.φ, e cos.φ: R::R:seg.φ. Il perchè (Inst. Arit. §. 184) dovrà essere

$$\text{tang. } \varphi = \frac{\text{R sen.}\varphi}{\text{cos.}\varphi}, \text{ e seg. } \varphi = \frac{\text{R}^2}{\text{cos.}\varphi}.$$

In oltre, poichè l' angolo REQ adegua il suo alterno BRL, e l' angolo RQE è uguale all' altro RBL, per esserne ambedue retti; sarà il triangolo RQE simile all' altro RBL. E perciò dovrà stare EQ : QR::RB:BL, ed EQ:ER::BR: LR; e nei simboli si avrà sen.φ : cos.φ:: R : cotan.φ, e sen.φ: R::R : coseg.φ. E quindi dovrà essere (Inst. Arit. §. 184).

$$\text{cotang. } \varphi = \frac{\text{R cos.}\varphi}{\text{sen.}\varphi}, \text{ e coseg. } \varphi = \frac{\text{R}^2}{\text{sen.}\varphi} \ldots \text{ C.B.F.}$$

§. 26. *Cor. I.* Adunque 1.° *la tangente di un arco è uguale al raggio multiplicato pel seno diviso pel coseno*: 2.° *la segante di un arco adegua il quadrato del raggio diviso pel coseno*: 3.° *la cotangente di un arco è uguale al prodotto del raggio pel coseno diviso pel seno*; 4.° *e la cosegante di un arco pareggia il quadrato del raggio diviso pel seno.*

§. 27. *Cor. II.* E poichè al triangolo REQ (§. 25.) è simile tanto il triangolo RMA, che l'altro RBL; dovrà essere il triangolo RMA simile all'altro RLB. Il perchè dee stare MA : AR :: RB : BL, ed MA : MR :: RB : RL: e nei simboli si ha tang. φ : R :: R : cot. φ, e tang. φ : seg. φ :: R : coseg. φ. Dunque dev' essere

$$\text{cotang. } \varphi = \frac{R^2}{\text{tang.}\varphi}, \text{ e coseg. } \varphi = \frac{R.\text{seg.}\varphi}{\text{tang.}\varphi}.$$

PROP. IV. TEOR.

§. 28. *I seni degli archi, che sono maggiori di* 180.° *e minori di* 360°, *debbono avere il segno contrario a quello dei seni degli archi contenuti tra* 0° *e* 180°.

Nel cerchio ABCD si distendano i due diametri AC, BD perpendicolari tra loro, e da un qualunque punto E preso nella semicirconferenza ABC si menino a quei diametri le perpendicolari EQ, EN. Di poi da un altro punto G della semicirconferenza ADGC si menino a quei diametri le perpendicolari GO, GP. Sarà EQ il seno dell' arco AE contenuto tra 0° e 180°, e GO il seno dell' arco ABCG contenuto tra 180° e 360°. Ma la EQ è uguale alla RN, e la GO

alla RP: e poi le rette RN ed RP hanno opposte direzioni rispetto al centro R del cerchio. Dunque il seno dell' arco AE dee avere il segno contrario a quello dell' arco ABCG. Vale a dire ec. C. B. D.

§. 29. *Cor. I.* E quindi assumendosi positivi i seni degli archi contenuti tra 0° e 180°; devono essere negativi i seni degli archi compresi tra 180° e 360°.

§. 30. *Cor. II.* Dagli estremi A e C del diametro AC del cerchio ABCD si prendano sulla circonferenza gli archi AE, AH, CF, CG tra se uguali, e ciascuno minore del quadrante. Sarà l' arco ABF uguale all' altro EBC, cioè uguale al supplemento dell' arco AE: e le perpendicolari EQ, FO, GO, HQ menate dai punti E, F, G, H sul diametro AC dovranno essere uguali tra loro. Ma tali perpendicolari sono rispettivamente seni degli archi AE, ABF, ABCG, ed ABGH. Dunque *sono uguali tra loro il seno di un arco minore del quadrante, il seno del supplemento dello stesso arco, il seno della semicirconferenza aumentata del medesimo arco, e 'l seno dell' intiera circonferenza diminuita dell' accennato arco:* ma il primo e 'l secondo di tali seni sono positivi, e 'l terzo e 'l quarto sono negativi (§. 29.).

PROP. V. TEOR.

§. 31. *I coseni degli archi contenuti tra* 0° *e* 90° *e tra* 270° *e* 360° *debbono avere il segno contrario a quello dei coseni degli archi maggiori di* 90° *e minori di* 270°.

Si faccia la stessa costruzione del §. 28^mo^. Sarà

EN il coseno dell' arco AE contenuto tra 0° e 90°, GP il coseno dell'arco ABCG contenuto tra 90° e 270°, ed HP il coseno dell' arco ABCDH contenuto tra 270° e 360°. Ma la EN è uguale a QR, e la GP alla RO: e sono poi le rette QR, RO in opposte direzioni rispetto al centro R del cerchio. Dunque il coseno dell' arco AE, ch'è tra 270° e 360° o tra 0° e 90° dev' essere col segno contrario a quello del coseno dell' arco ABF, ch'è maggiore di 90°, e minore di 270° C. B. D.

§. 32. *Cor. I.* Dunque assumendosi positivi i coseni degli archi, che sono tra 0° e 90°; debbono aversi anche come positivi i coseni degli archi maggiori di 270° e minori di 360°: e converrà prendere negativamente i coseni di quegli archi, che sono compresi tra 90° e 270°.

§. 33. *Cor. II.* Si faccia la stessa costruzione del §. 30. Essendo uguali gli archi AE, AH, CF, CG; saranno anche tra se uguali i complementi di essi BE, BF, DG, DH, e le perpendicolari EN, FN, GP, HP menate dai punti E, F, G, H sul diametro BD dovranno pure pareggiarsi. Ma quelle perpendicolari sono i coseni dei rispettivi archi AE, ABF, ABCG, ed ABCDH. Dunque *sono uguali tra loro il coseno di un arco minore del quadrante, il coseno del suo supplemento, quello della semicirconferenza aumentata del medesimo arco, e quello dell' intiera circonferenza diminuita dello stesso arco*: ma il primo ed il quarto di tali coseni sono positivi, e 'l secondo e 'l terzo sono negativi (§. 32.).

§. 34. *Cor. III.* Essendo tang. $\varphi = \frac{R\text{sen.}\varphi}{\text{cos.}\varphi}$,

e $\text{cotang.}\varphi = \frac{R.\cos.\varphi}{\text{sen.}\varphi}$; l'è chiaro, che la tangente e la cotangente di un arco debbano essere positive qualora hanno il segno stesso il seno e 'l coseno di esso arco. Ma nel primo quadrante il seno e 'l coseno sono ambedue positivi, e nel terzo sono ambedue negativi: ed hanno poi segni contrarii il seno e 'l coseno nel secondo e quarto quadrante. Dunque sono positive le tangenti e le cotangenti degli archi contenuti tra 0° e 90°, e tra 180° e 270°: e sono negative le tangenti e le cotangenti degli archi contenuti tra 90° e 180°, e tra 270° e 360°.

§. 35. *Cor. IV.* Nello stesso modo potrebbe rilevarsi, 1° che sieno positive le seganti degli archi contenuti tra 0° e 90° e tra 270° e 360°, e negative quelle degli archi contenuti tra 90° e 270°: 2° e che sieno positive le coseganti degli archi compresi tra 0° e 180°, e negative quelle degli archi, che sono tra 180° e 360°.

§. 36. *Cor. V.* Da quanto finora si è stabilito rilevasi, che un arco minore del quadrante, il supplemento di esso, la semicirconferenza aumentata del medesimo arco, e l'intiera circonferenza diminuita dello stesso debbono avere uguali linee trigonometriche; prescindendo però dai segni, che tali linee hanno nei diversi quadranti (§§. 29 e 32.). Il perchè essendo noti i valori delle linee trigonometriche degli archi minori di 90°; si potranno facilmente rilevare i valori di quelle degli altri archi maggiori di 90°.

§. 37. *Scol.* E poichè dalle definizioni del seno e del coseno di un arco e dalle precedenti Proposizioni si rileva, che debba essere

$$\left.\begin{array}{l}\text{sen. } 0^\circ = 0,\\ \text{sen. } 90^\circ = R,\\ \text{sen.} 180^\circ = 0,\\ \text{sen.} 270^\circ = -R,\end{array}\right\} \text{ e } \left\{\begin{array}{l}\text{cos. } 0^\circ = R\\ \text{cos. } 90^\circ = 0\\ \text{cos.} 180^\circ = -R\\ \text{cos.} 270^\circ = 0\end{array}\right\};$$

sarà pure (§. 26.)

$$\left.\begin{array}{l}\text{tang. } 0^\circ = \frac{R.0}{R} = 0,\\ \text{tang. } 90^\circ = \frac{R.R}{0} = \pm\infty \text{ (a)},\\ \text{tang.} 180^\circ = \frac{R.0}{-R} = 0,\\ \text{tang.} 270^\circ = \frac{R.-R}{\pm 0} = \pm\infty,\end{array}\right\} \text{ e } \left\{\begin{array}{l}\text{cot. } 0^\circ = \frac{R.R}{0} = +\infty,\\ \text{cot. } 90^\circ = \frac{R.0}{R} = 0,\\ \text{cot.} 180^\circ = \frac{R.-R}{R} = \pm\infty,\\ \text{cot.} 270^\circ = \frac{R.0}{-R} = 0.\end{array}\right.$$

E nello stesso modo si potrebbero determinare i valori delle seganti e delle coseganti nelle estremità dei quattro quadranti.

PROP. VI. TEOR.

§. 38. *Le linee trigonometriche degli archi di cerchi differenti, e che contengono lo stesso numero di gradi e minuti sono come i raggi di essi cerchi.*

Col centro (*fig.* 1.) C vertice di un qualunque angolo rettilineo, e con differenti intervalli si descrivano tra i lati dello stesso angolo gli archi circolari BA, EF, e dai punti B ed E si menino le rette BH, EK perpendicolari ad AC, e pei punti A ed F si distendano le rette AG,

(a) *Qualora una grandezza si pone uguale a ∞ si vuol dinotare, che essa è infinita.*

FM perpendicolari ad AC. Dovranno essere gli archi AB, FE dello stesso numero di gradi e minuti (§. 5): e di tali archi ne saranno le rette BH, EK i seni; AG, FM le tangenti, e CG, CM le seganti. Per la somiglianza dei triangoli CBH, CEK dee stare CB : CE::BH:EK: e per la somiglianza dei triangoli CGA, CMF alla ragione di CA a CF l'è uguale tanto quella di GA ad MF, che l'altra di CG a CM. Dunque i seni, le tangenti, e le seganti degli archi AB, FE sono proporzionali ai raggi CB, CE dei cerchi, cui essi archi appartengono. Nello stesso modo potrà dimostrarsi, che i seni, le tangenti, e le seganti dei complementi degli archi AB, FE sieno proporzionali ai raggi CA, CF. Ma i seni, le tangenti, e le seganti dei complementi degli archi AB, FE sono rispettivamente coseni, cotangenti, e coseganti di essi archi. Dunque le linee trigonometriche ec. C.B.D.

§. 39. *Cor.* Dunque se i raggi di due cerchi ne sieno dinotati dai numeri m ed n; le linee trigonometriche della stessa specie di due archi di essi cerchi, che contengono lo stesso numero di gradi e minuti, debbono esserne dinotate da numeri, che sono tra loro nella ragione di $m:n$.

CAP. III.

DELLA COSTRUZIONE DEL CANONE TRIGONOMETRICO.

§. 40. *Def. XI.* Il *Canone trigonometrico* è una tavola, ove per gli archi minori del quadrante ed espressi in gradi e minuti vi sono esibiti i logaritmi volgari dei numeri, che ne dinotano le linee trigonometriche di essi archi,

posto il raggio del cerchio uguale a 10000000000. E questo registro di logaritmi suol dirsi *Tavola logaritmica dei seni.*

§. 41. *Cor.* Essendo ciascun grado di 60', ed ogni minuto primo contenendo 60''; il quadrante, ch'è di 90°, dovrà contenere 324000''. Dunque debbono essere 324000 quegli archi, che da zero fino a 90° vanno successivamente crescendo di 1''. Or poichè i logaritmi delle linee trigonometriche di archi compresi tra due, che non differiscono tra loro per più di 10'', e di cui ciascuno non è minore di 4°, crescono o diminuiscono a un di presso come crescono gli archi, purchè que' logaritmi si computino fino alla settima cifra decimale; per tal ragione nelle tavole logaritmiche de' seni, ove i logaritmi sono approssimati fino alla settima cifra decimale, come in quelle del *Gardiner*, il primo arco, di cui vengono esibiti i logaritmi dei seni e delle tangenti, è di 1'', il secondo di 2'', il terzo di 3'', ec. fino all'arco di 4°: ma oltrepassati i 4° pongonsi i logaritmi delle linee trigonometriche degli archi, che da 4° fino a 90° vanno successivamente crescendo di 10''.

§. 42. *Scol.* Il canone trigonometrico distinguesi in *artificiale* o *logaritmico*, ed in *naturale* o *lineare.* L'artificiale è il quassù definito: e'l naturale esibisce i valori numerici delle linee trigonometriche degli archi, che da zero fino a 90° vanno successivamente crescendo di 1', posto il raggio del cerchio uguale ad 1.

PROP. VII. TEOR.

§. 43. *Il coseno di un qualunque arco è la radice quadrata della differenza tra i quadrati del raggio e del seno di esso arco.*

L' arco circolare (*fig.* 5) AC ha per seno la perpendicolare CD, che dall' estremo C di esso si abbassa sul raggio EA disteso per l'altro estremo, e lo stesso arco ha per coseno la perpendicolare CF menata dal suo estremo sul raggio EB disteso per l' estremo B del quadrante AB. Dunque sono retti tre angoli del quadrilatero EFCD; e perciò questo dev' essere un rettangolo. Il perchè dev' essere CF uguale ad ED (34. El. 1). Ma il quadrato di ED adegua (47 El. 1) la differenza de' quadrati di EC e di CD. Dunque se con φ si dinoti l' arco AC, e con R il raggio EA del cerchio ACB; si avrà

$$\cos.\varphi = \sqrt{(R^2 - \text{sen.}^2\varphi)}. \ . \ . \ . \text{ C. B. D.}$$

§. 44. *Cor. I.* Sia l' arco AC di 30°, il complemento BC di esso dovrà essere di 60°, e di 60° sarà (§. 7.) pure l' angolo BEC. Onde i due angoli EBC, ECB insieme dovranno pareggiare 120°. Ma per esserne EC uguale ad EB questi angoli sono tra se uguali. Dunque ciascuno di essi dev' essere di 60°, e con ciò uguale all' angolo BEC. Il perchè la corda BC dell' arco di 60° dee pareggiare il raggio EC. E quindi i due triangoli EFC, BFC, che hanno le condizioni della Prop. XXVI El. I, avranno pure uguali i lati EF, FB. Il perchè dovrà essere la EF, o la sua uguale CD metà del raggio EC. Vale a dire, che *il seno dell' arco di* 30° *adegua la metà del raggio.*

§. 45. *Cor. II.* Dunque (§. 43.) dev' essere $\cos.30^\circ = \sqrt{\left(R^2 - \frac{R^2}{4}\right)} = \sqrt{\frac{3R^2}{4}}$, o (§. 120. *Ins. Alg.*) sia $\cos.30^\circ = \frac{R}{2}\sqrt{3}$. E ponendo il valore del raggio (§. 40), ed estraendo la radice quadrata da 3, si avrà

$$\cos.30^\circ = 8660254037,8443835795$$

PROP. VIII. TEOR.

§. 46. *Il seno della somma di due archi adegua la somma dei prodotti, che si ottengono multiplicando il seno di ciascuno di essi archi pel coseno dell' altro diviso pel raggio. E 'l seno della differenza di due archi è poi uguale alla differenza di quei medesimi prodotti.*

Rappresentino (*fig.* 6) AB, BE gli archi proposti, di cui BO ed EF ne sieno i seni, ed OC e CF i coseni. Si prolunghi la EF insino al punto D, e dai punti E, F, e D si menino le rette EK, FN, DL perpendicolari alla CA, e dai punti D ed F si abbassino le rette DH, FG perpendicolari alla EK. Sarà l' arco BE uguale all' altro BD, ed AD dovrà essere la differenza degli archi AB, BE.

Ciò premesso. Si ponga l' arco $AB = \theta$, e l' altro $BE = \varphi$. Sarà l' arco $ABE = \theta + \varphi$, e l' altro $AD = \theta - \varphi$: e dovrà essere $BO = \text{sen}.\theta$, $EF = \text{sen}.\varphi$, $CO = \cos.\theta$, $CF = \cos.\varphi$, $EK = \text{sen}.(\theta + \varphi)$ e DL $\text{sen}.(\theta - \varphi)$.

Or essendo simili i triangoli CBO, CFN, dee

stare CB : BO :: CF : FN ; cioè R : sen.θ::cos φ: $FN=\frac{\text{sen.}\theta.\cos.\varphi}{R}$. Ma per essere l' angolo retto CFE uguale ai due CFN , FCN insieme presi , e l' angolo CFG uguale al suo alterno FCN ; ancora l' angolo EFG pareggia l' altro CFN , o il suo uguale CBO. E quindi i due triangoli CBO , FGE, che hanno retti gli angoli in O e G , ed uguali gli altri CBO , EFG, devono essere eziandio simili. Onde dovrà stare CB : CO::EF : EG ; cioè

R : cos.θ:: sen.φ : $EG=\frac{\text{sen.}\varphi.\cos.\theta}{R}$. Il perchè dovranno essere le due FN , ed EG insieme , o sia la EK , cioè

$$\text{sen.}(\theta+\varphi)=\frac{\text{sen.}\theta.\cos.\varphi+\text{sen.}\varphi.\cos.\theta}{R} \quad . \ . \ . \ . \ (1).$$

In oltre , essendo EF=FD , ed EF : FD::EG : GH ; dev' essere pure EG=GH , ed HK , o sia DL sarà quanto GK—GE ; cioè dovrà essere

$$\text{sen.}(\theta-\varphi)=\frac{\text{sen.}\theta.\cos.\varphi-\text{sen.}\varphi.\cos.\theta}{R} \quad . \ . \ . \ . \ (2) \ . \ .$$

C. B. D.

§. 47. *Cor. I.* Sia n un qualunque numero intiero, e l' arco $n\varphi$ adegui θ. Sarà $\theta+\varphi=n\varphi+\varphi=(n+1)\varphi$, e $\theta-\varphi=(n-1)\varphi$. Il perchè dovendo essere (§. 46.)

$$\text{sen.}(n+1)\varphi=\frac{\text{sen.}n\varphi\cos.\varphi+\text{sen.}\varphi\cos.n\varphi}{R},$$

$$\text{sen.}(n-1)\varphi=\frac{\text{sen.}n\varphi\cos.\varphi-\text{sen.}\varphi\cos.n\varphi}{R},$$

sarà la somma dei due primi membri di queste equazioni uguale a quella dei secondi; cioè dovrà essere

$$\text{sen.}(n+1)\varphi+\text{sen.}(n-1)\varphi=\frac{2\text{sen.}n\varphi\cos\varphi}{R};$$

e quindi si avrà

$$\text{sen.}(n+1)\varphi=\frac{2\text{sen.}n\varphi\cos.\varphi}{R}-\text{sen.}(n-1)\varphi$$

Onde se n si faccia uguale ad 1; si ha $n-1=0$, $\text{sen.}(n-1)\varphi=0$, e

$$\text{sen.}2\varphi=\frac{2\text{sen.}\varphi.\cos.\varphi}{R}.$$

E ponendo n successivamente uguale a 2, 3, 4, ec. si otterranno le seguenti equazioni

$$\text{sen.}3\varphi=\frac{2\text{sen.}2\varphi\cos.\varphi}{R}-\text{sen.}\varphi,$$

$$\text{sen.}4\varphi=\frac{2\text{sen.}3\varphi.\cos.\varphi}{R}-\text{sen.}2\quad,$$

$$\text{sen.}5\varphi=\frac{2\text{sen.}4\varphi\cos.\varphi}{R}-\text{sen.}3\varphi,$$

ec.

§. 48. *Cor. II.* Sia l'arco θ di 60°. Sarà (§. 44.) $\cos.\theta=\frac{R}{2}$, e l'equazioni (1) e (2) della precedente Proposizione si dovranno trasformare nelle seguenti

$$\text{sen.}(60°+\varphi)=\frac{\text{sen.}60°\cos.\varphi}{R}+\frac{\text{sen.}\varphi}{2},$$

e $$\text{sen.}(60°-\varphi)=\frac{\text{sen}\text{-}60°\cos\varphi}{R}-\frac{\text{sen.}\varphi}{2}.$$

E sottraendo il primo membro della seconda di queste equazioni dal primo membro della prima, e 'l secondo membro della seconda dal secondo della prima, si avrà

$$\text{sen.}(60^\circ+\varphi)-\text{sen.}(60^\circ-\varphi)=\text{sen.}\varphi$$

$$\text{e sen.}(60^\circ+\varphi)=\text{sen.}\varphi+\text{sen.}(60^\circ-\varphi)$$

Dunque *il seno di un arco maggiore di* 60° *adegua il seno dell' eccesso di esso arco sopra* 60° *aggiuntovi il seno dell' arco, ch' è differenza tra* 60° *e 'l detto eccesso.*

§. 49. *Cor. III.* Si ponga l'arco $\alpha=\theta+\varphi$, e l'arco $\beta=\theta-\varphi$. Sarà $\alpha+\beta=2\theta$, ed $\alpha-\beta=2\varphi$; cioè $\theta=\frac{\alpha+\beta}{2}$, e $\varphi=\frac{\alpha-\beta}{2}$. Onde se nelle equazioni (1) e (2) si facciano le convenevoli riduzioni, ne dovrà risultare

$$\text{sen.}\alpha=\frac{\text{sen.}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos.\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\text{sen.}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos.\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{R},$$

$$\text{e sen.}\beta=\frac{\text{sen.}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos.\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\text{sen.}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos.\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{R},$$

e sommando di queste due equazioni i primi membri tra loro, ed i secondi tra loro, si avrà

$$\text{sen.}\alpha+\text{sen.}\beta=\frac{2\text{sen.}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos.\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{R},$$

e prendendo la differenza dei primi e dei secondi membri delle medesime equazioni, si avrà

$$\text{sen.}\alpha-\text{sen.}\beta=\frac{2\text{sen.}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos.\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{R}.$$

Dunque *la somma dei seni di due archi adegua il doppio prodotto del seno della semisomma pel coseno della semidifferenza di essi archi diviso pel raggio*: II. *La differenza dei seni di due archi pareggia il doppio prodotto del seno della semidifferenza pel coseno della semisomma dei medesimi archi diviso pel raggio.*

§. 50. *Cor. IV.* Il perchè dovrà stare $\text{sen.}\alpha+\text{sen.}\beta : \text{sen.}\alpha-\text{sen.}\beta :: \text{sen.}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos.\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right) : \text{sen.}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos.\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$;

e multiplicando i termini della seconda ragione di questa analogia per $\frac{R}{\cos.\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos.\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}$, ne dovrà risultare

$$\text{sen.}\alpha+\text{sen.}\beta : \text{sen.}\alpha-\text{sen.}\beta :: \frac{R.\text{sen.}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos.\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} : \frac{R.\text{sen.}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos.\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)},$$

ovvero (§. 26.)

$sen.\alpha + sen.\beta : sen.\alpha - sen.\beta :: tang.\frac{(\alpha+\beta)}{2} : tang.\frac{(\alpha-\beta)}{2}$.

Dunque *la somma dei seni di due archi sta alla differenza di essi come la tangente della semisomma di quegli archi alla tangente della semidifferenza di essi.*

PROP. IX. TEOR.

§. 51. *Il coseno della somma di due archi adegua la differenza tra 'l prodotto dei coseni e quello dei seni divisa pel raggio.*

E 'l coseno della differenza di due archi è uguale somma del prodotto dei coseni, e di quello dei seni divisa pel raggio.

Si faccia la costruzione della Proposizione precedente. Sarà CK il coseno della somma degli archi AB, BE, e CL il coseno della differenza de' medesimi archi. Onde facendo le stesse indicazioni della Prop. prec., sarà $CK = cos.(\theta+\varphi)$, e $CL = cos.(\theta-\varphi)$. Or essendo simili i triangoli CBO, CFN, dee stare CB : CO :: CF : CN, e nei simboli si ha $R : cos.\theta :: cos.\varphi : CN = \frac{cos.\theta cos.\varphi}{R}$.

Ma lo stesso triangolo CBO è simile all' altro EFG, come si è dimostrato nella Prop. prec. Dunque dee stare CB : BO :: EF : FG, e nei simboli si ha $R : sen.\theta :: sen.\varphi : FG = \frac{sen.\theta . sen.\varphi}{R}$. Il perchè essendo $CK = CN - FG = cos.(\theta+\varphi)$, e $CL = CN + FG = cos.(\theta-\varphi)$; sarà pure

$$\cos.(\theta+\varphi)=\frac{\cos.\theta\cos.\varphi-\text{sen}.\theta\,\text{sen}.\varphi}{R},$$

$$\text{e}\ \cos.(\theta-\varphi)=\frac{\cos.\theta\cos\varphi+\text{sen}.\theta\text{sen}.\varphi}{R}.\ \ldots\ \text{C.B.D.}$$

§. 52. *Cor. I.* Sia l' arco $\theta=\varphi$. Sarà $\theta+\varphi=2\varphi$, $\cos.\theta\ \cos.\varphi=\cos.^2\varphi$, e $\text{sen}.\theta\ \text{sen}.\varphi=\text{sen}.^2\varphi$; e quindi dev' essere

$$\cos.2\varphi=\frac{\cos.^2\varphi-\text{sen}.^2\varphi}{R}.$$

Ma è poi

$$R^2=\text{sen}.^2\varphi+\cos.^2\varphi$$

e con ciò $R=\frac{\text{sen}.^2\varphi+\cos.^2\varphi}{R}$.

Dunque dev' essere

$R+\cos.2\varphi=\frac{2\cos.^2\varphi}{R}$, ed $R-\cos.2\varphi=\frac{2\text{sen}.^2\varphi}{R}$.

E risolvendo queste due ultime equazioni per determinarvi i valori di $\cos.\varphi$ e $\text{sen}.\varphi$ pel raggio e'l coseno dell' arco doppio di φ, si avrà

$$\cos.\varphi=\sqrt{\left(\frac{R^2+R\cos.2\varphi}{2}\right)},$$

$$\text{e sen}.\varphi=\sqrt{\left(\frac{R^2-R\cos.2\varphi}{2}\right)}$$

§. 53. *Cor. II.* Essendo $\text{sen}.2\varphi=\frac{2\text{sen}.\varphi\cos.\varphi}{R}$ (§.47.), ed $R^2-R\cos.2\varphi=2\ \text{sen}.^2\varphi$; dovrà essere $\frac{\text{sen}.2\varphi}{R^2-R\cos.2\varphi}=\frac{\text{sen}.\varphi\cos.\varphi}{R\text{sen}.^2\varphi}=\frac{\cot.\varphi}{R^2}$, e $\frac{\text{sen}.2\varphi}{R-\cos.2\varphi}=\frac{\cot.\varphi}{R}$.

§. 54. *Cor. III.* In ciascuna delle due ultime equazioni del Teorema precedente si pong-

$\theta+\varphi=\alpha$, e $\theta-\varphi=\beta$. Sarà $\theta=\frac{\alpha+\beta}{2}$, e $\varphi=\frac{\alpha-\beta}{2}$; e quindi quelle due equazioni si trasformeranno nelle seguenti

$$\cos.\alpha=\frac{\cos.\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos.\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)-\text{sen}.\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\text{sen}.\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{R},$$

$$\text{e } \cos.\beta=\frac{\cos.\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos.\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\text{sen}.\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\text{sen}.\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{R},$$

Il perchè dovrà essere

$$\cos.\alpha+\cos.\beta=\frac{2\cos.\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos.\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{R}, \quad \ldots \; (3),$$

$$\text{e } \cos.\beta-\cos.\alpha=\frac{2\text{sen}.\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\text{sen}.\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{R}. \quad \ldots \; (4)$$

Dunque I. *la somma dei coseni di due archi pareggia il doppio prodotto del coseno della semisomma di essi archi pel coseno della semidifferenza diviso pel raggio* : II. *La differenza dei coseni di due archi pareggia il doppio prodotto del seno della semisomma pel seno della semidifferenza diviso pel raggio.*

§. 55. *Cor. IV.* Essendo (§. 49.)

$$\text{sen}.\alpha+\text{sen}.\beta=\frac{2\text{sen}.\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos.\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{R} \quad \ldots \; (5),$$

$$\text{e } \text{sen}.\alpha-\text{sen}.\beta=\frac{2\text{sen}.\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos.\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{R} \quad \ldots \; (6);$$

l'è chiaro, che se il primo membro dell' equazione (5) dividasi pel primo membro dell' equazione (3), e 'l secondo pel secondo, ne dovrà risultare

$$\frac{\text{sen.}\alpha+\text{sen.}\beta}{\cos.\alpha+\cos.\beta}=\frac{\text{sen.}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos.\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}=\frac{\text{tang.}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{R},$$

e se dividasi il primo membro dell' equazione (6) pel primo membro dell' equazione (3), e 'l secondo pel secondo, si dovrà avere

$$\frac{\text{sen.}\alpha-\text{sen.}\beta}{\cos.\alpha+\cos.\beta}=\frac{\text{sen.}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\cos.\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}=\frac{\text{tang.}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{R}.$$

Dunque *la somma de' seni di due archi divisa per quella dei coseni pareggia la tangente della semisomma de' medesimi archi divisa pel raggio; e la differenza de' seni di due archi divisa per la somma dei coseni degli archi stessi pareggia la tangente della semidifferenza di quegli archi divisa pel raggio.*

§. 56. *Cor. V.* Essendo (§. 47.)

$$\text{sen.}(\alpha+\beta)=\frac{2\text{sen.}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos.\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}{R}\ldots.(7),$$

se il primo membro dell' equazione (5) si divida pel primo membro dell' equazione (7), e 'l secondo di quella pel secondo di questa, si avrà

$$\frac{\text{sen.}\alpha+\text{sen.}\beta}{\text{sen.}(\alpha+\beta)}=\frac{\cos.\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos.\frac{\alpha+\beta}{2}};$$

e se il primo membro dell' equazione (6) si divida pel primo membro dell'equazione (7), e 'l secondo pel secondo, ne dovrà risultare

$$\frac{\text{sen.}\alpha-\text{sen.}\beta}{\text{sen.}(\alpha+\beta)}=\frac{\text{sen.}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\text{sen.}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}.$$

Dunque I. *La somma de' seni di due archi divisa pel seno della somma di essi archi pareggia il coseno della semidifferenza diviso pel coseno della semisomma degli archi stessi.* II. *La differenza de' seni di due archi divisa pel seno della somma di essi pareggia il seno della semidifferenza divisa pel seno della semisomma de' medesimi archi.*

§. 57. *Cor. VI.* In oltre, essendo (§. 26.)

$$\text{tang.}(\theta+\varphi)=\frac{\text{Rsen.}(\theta+\varphi)}{\cos.(\theta+\varphi)},$$

dev' essere pure

$$\text{tang.}(\theta+\varphi)=\frac{\text{Rsen.}\theta\cos.\varphi+\text{Rsen.}\varphi\cos.\theta}{\cos.\theta\cos.\varphi-\text{sen.}\theta\text{sen.}\varphi},$$

e multiplicando il numeratore e 'l denominatore del fratto, ch' è nel secondo membro, per $\frac{R^2}{\cos.\theta\cos.\varphi}$, ne dovrà risultare

$$\text{tang.}(\theta+\varphi)=\frac{R^2\text{tang.}\theta+R^2\text{tang.}\varphi}{R^2-\text{tang.}\theta\text{tang.}\varphi} \quad \ldots \ldots (8).$$

Similmente si potrà dimostrare, che sia

$$\text{tang.}(\theta-\varphi)=\frac{R^2\text{tang.}\theta-R^2\text{tang.}\varphi}{R^2+\text{tang.}\theta\text{tang.}\varphi} \quad \ldots \ldots (9).$$

§. 58. *Cor. VII.* Il perchè se nell' equazione (8) si ponga $\theta=\varphi$, si avrà

$$\text{tang.}2\varphi=\frac{2R^2\text{tang.}\varphi}{R^2-\text{tang.}^2\varphi}.$$

PROP. X. PROBL.

§. 59. *Determinare il seno dell' arco di 10".*

Sol. Nelle due ultime equazioni del §. 52 si ponga l' arco di 30° per 2φ, e con ciò quello di 15° per φ. Dovrà essere

$$\text{sen.}15°=\sqrt{\left(\frac{R^2-R\cos.30°}{2}\right)},$$

$$\text{e } \cos.15°=\sqrt{\left(\frac{R^2+R\cos.30°}{2}\right)}.$$

Ma sono noti i secondi membri di queste due equazioni (§. 45.). Dunque debbono essere noti eziandio i primi. Or se pongasi $2\varphi=15°$, si avrà $\varphi=7°.30'$, e (§. 52.)

$$\text{sen.}7°.30'=\sqrt{\left(\frac{R^2-R\cos.15°}{2}\right)},$$

$$\text{e } \cos.7°.30'=\sqrt{\left(\frac{R^2+R\cos.15°}{2}\right)},$$

e da queste due ultime equazioni si otterranno i valori del seno e del coseno di 7°.30'. Nello stesso modo procedendo si potranno determinare i seni ed i coseni degli archi, che sono rispettivamente la metà, la quarta parte, l'ottava parte ec. di 7°.30', come osservasi nell' equazioni quaggiù rapportate. Ma da queste equazioni si rileva, che i seni sono proporzionali agli archi, quando questi sono picciolissimi. Dunque se facciasi l' arco di 6'',591796875 all' altro di 10'' come il seno di quello ad un quarto; questo dovrà dinotarne il seno di 10''. C. B. F.

sen.15°=2588190451,025210410
cos.15°=9659258262,890682119
sen.7°.30′=1305261922,2005173491
cos.7°30′=9914448613,7381039227
sen.3°45′=654031292,30143113131
cos.3°45′=9978589232,3860350201
sen.1°.52′.30″=327190828,2177617819
cos.1°.52′.30″=9994645874,7636564325
sen.56′.15″=163617316,2648679936
cos.56′.15″=9998661379,0956178256
sen.28′,7″,5=81811396,0391269559
cos.28′.7″,5=9999665339,1740110338
sen.14′.3″,75=40906040,2023479434
cos.14′.3″,75=9999916334,4430560375
sen.7′.1″,875=20453062,9667004277
cos.7′.1″,875=9999979083,5888891966
sen.3′.30″,9375=10226536,8309128477
cos.3′.30″,9375=9999994770,89585517264
sen.1′.45″,46875=5113269,0838578796
cos.1′.45″,46875=9999998692,7233783445
sen.52″,734375=2556635,0948615056
cos.52″,734375=9999999673,1808392455
sen.26″,3671875=1278317,5676499561
cos.26″,3671875=9999999918,2952094771
sen.13″,18359375=639158,7851344139
cos.13″,18359375=9999999979,5738023484
sen.6″,591796875=319579,3927305076
sen.10″ =484813,7748769808

§. 60. *Cor.* Essendo noto per lo Probl. prec. il seno dell' arco di 10'' coll' approssimazione fino alla quarta cifra decimale; si potrà determinare con pari esattezza il valore di cos.10'', che adegua $\sqrt{R^2 - \text{sen}^2 10''}$.

PROP. XI. PROBL.

§. 61. *Supposto che il raggio del cerchio sia uguale a 10000000000 ; uopo è coll' approssimamento alle parti millesime determinare i valori numerici dei seni degli archi, che da 0° fino a 90° vanno successivamente crescendo di 10''.*

Sol. Nell' equazione (§. 47.)

$$\text{sen.}(n+1)_\varphi = \frac{2\text{sen.}n_\varphi\text{cos.}_\varphi}{R} - \text{sen.}(n-1)_\varphi$$

si ponga per φ l' arco di 10''; quindi è che la medesima si trasformerà in quest' altra

$$\text{sen.}(n+1)10'' = \frac{2\text{sen.}n.10''.\text{cos.}10''}{R}$$

$$-\text{sen.}(n-1)10'' \;.\;.\;.\;.\; (10).$$

Dunque se pongasi $n=1$, si avrà

$$\text{sen.}20'' = \frac{2\text{sen.}10''\text{cos.}10''}{R}.$$

Ma dalla Prop. prec. e dal Cor. della stessa si possono determinare i valori di sen.10'' e cos. 10'' coll' approssimazione fino alla quarta cifra decimale. Dunque coll' approssimamento medesimo si avrà da quest' ultima equazione il valore di sen.20''. Similmente ponendo $n=2$ nell' equazione (10) si avrà

$$\text{sen.}30'' = \frac{2\text{sen.}20''\text{cos.}10''}{R} - \text{sen.}10'',$$

e ponendo $n=3$, ne risulterà

$$\text{sen.}40'' = \frac{2\text{sen.}30''\text{cos.}10''}{R} - \text{sen.}20''.$$

Così potranno ancora determinarsi i seni degli

archi 50'',1', 1'.10'', ec. fino a quello di 60°. Ma essendo (§. 48.)

$$\text{sen.}(60^\circ+\varphi)=\text{sen.}\varphi+\text{sen.}(60^\circ-\varphi)\ ;$$

sarà cosa facile il determinare i seni degli archi, che da 60° fino a 90° vanno successivamente crescendo di 10''. C. B. D.

§. 62. *Cor. I.* Essendo il seno di un arco uguale al coseno del complemento di esso ; l'è chiaro, che dalla Prop. prec. ne restano determinati i coseni degli archi, che da 90° fino a 0° vanno successivamente decrescendo di 10''.

§. 63. *Cor. II.* E poichè nel §. 59 sono stati determinati i valori numerici del seno e del coseno di 7'.1'',875, e per mezzo della Prop. prec. ne restano parimente determinati i valori numerici del seno e del coseno di 7'; è chiaro, che con tali risultamenti si possa in facil modo determinare il valore numerico dell'espressione

$$\frac{\text{sen.}7'.1'',875\ \cos.7'-\text{sen.}7'\cos.7'.1'',875}{R},$$

che adegua sen.(7'.1'',875—7'), cioè sen.1'',875. Il perchè se facciasi 1'',875:1''::sen.1'',875 al quarto proporzionale; questo dovrà dinotarne il seno di 1'', per mezzo del quale si potrà poi determinare il coseno dell'arco di 1''.

§. 64. *Cor. III.* In oltre, essendo noti i valori del seno e del coseno di 1''; sarà facile determinare i valori numerici dei seni e dei coseni degli archi, che da 1'' fino a 4° vanno successivamente crescendo di 1'' (§. 47).

§. 65. *Cor. IV.* Dunque ritrovando i log-mi corrispondenti ai valori numerici dei seni e dei coseni degli archi indicati nei §§. prec., e poi

dalla somma del log-mo 10 del raggio R e dell' altro del seno di un arco togliendo il logaritmo del coseno dello stesso arco ; si avrà il logaritmo della tangente di questo arco medesimo. In simil guisa si dovrà operare per determinare i logaritmi delle tangenti degli altri archi. Ma le tangenti di tali archi sono rispettivamente le cotangenti dei complementi di essi (§. 21). Dunque per mezzo delle laboriose operazioni finora indicate si perviene a costruire il canone trigonometrico artificiale, o sia la tavola logaritmica dei seni.

C A P. IV.

PRINCIPII DE' QUALI ABBISOGNANO LE RISOLUZIONI DE' TRIANGOLI RETTILINEI.

PROP. XII. TEOR.

§. 66. *In ogni triangolo rettangolo il raggio trigonometrico sta al seno di uno degli angoli acuti, come l' ipotenusa al lato, che sottende lo stesso angolo. E 'l coseno di uno degli angoli acuti sta al raggio trigonometrico, come il lato adjacente ad esso angolo sta all' ipotenusa.*

Sia (*fig.* 7.) ABC un triangolo, che abbia retto l' angolo BAC, dico, 1° che debba stare il raggio trigonometrico al seno dell' angolo ABC, come l' ipotenusa BC al lato AC opposto al medesimo angolo ABC; 2° e che stia il coseno dell' angolo ABC al raggio trigonometrico come il lato AB adjacente allo stesso angolo all' ipotenusa BC.

Col centro B e coll' intervallo il raggio trigonometrico BD si descriva tra i lati dell'angolo ABC l' arco circolare DE, e dal punto E si meni sulla BA la perpendicolare EF. Sarà EF il seno dell' angolo ABC, e BF ne sarà il coseno.

Or, a cagione de' triangoli simili BEF,BCA, sta BE:EF::BC:CA, e BF:BE::BA:BC; cioè R:sen.B::BC:CA, e cos.B:R::BA:BC. Dunque in ogni triangolo rettangolo ec. C.B.D.

PROP. XIII. TEOR.

§. 67. *In ogni triangolo rettangolo sta il raggio trigonometrico alla tangente di uno degli angoli acuti, come il lato adjacente a tale angolo al lato, che lo sottende.*

Col centro B vertice di uno degli angoli acuti del triangolo rettangolo BAC, e col raggio trigonometrico BD si descriva tra i lati di esso angolo l' arco circolare DE, e dal punto D si elevi alla BA la perpendicolare DG, che ne incontri l' ipotenusa BC del proposto triangolo nel punto G. Sarà DG la tangente dell' angolo ABC: e per la somiglianza de' triangoli BDG, ABC dee stare BD:DG::BA:AC; cioè R: tang. ABC::AB:AC. C.B.D.

PROP. XIV. TEOR.

§. 68. *In ogni triangolo i lati sono come i seni degli angoli ad essi opposti.*

Sia (*fig.* 8.) ABC un qualunque triangolo; dico, che stia BC : BA :: sen.BAC:sen.BCA, e BA:AC::sen.BCA:sen.ABC.

Cas. I. Dal vertice B di uno degli angoli del proposto triangolo si meni sul lato opposto AC la perpendicolare BD, la quale cada primieramente dentro del triangolo. Dovrà stare (§. 66.) sen.A:R::BD:BA, e R:sen.C::BC:BD. Dunque le tre grandezze sen.A, R, e sen.C sono in proporzione perturbata colle altre tre BC, BD, e BA; e quindi per equalità si avrà sen.A:sen. C::BC:BA.

Cas. II. Che se poi la perpendicolare BD cada fuori del triangolo ABE; in tal caso dee stare pure sen.A: R::BD : BA, ed R : sen.BED :: BE : BD (§. 66.). Onde per equalità perturbata si avrà sen. A : sen. BED :: BE : BA. Ma il seno dell'angolo BED adegua quello del supplemento di esso angolo, cioè di BEA. Dunque dee stare sen. BAE : sen. BEA :: BE : BA. Nello stesso modo potrà dimostrarsi, che stia BA : AE :: sen. BEA : sen. ABE. E perciò in ogni triangolo ec. C. B. D.

PROP. XV. TEOR.

§ 69. *In ogni triangolo la somma di due lati sta alla differenza di essi, come la tangente della semisomma degli angoli opposti ai medesimi lati alla tangente della semidifferenza degli stessi angoli.*

Sia ABC un qualunque triangolo; dico, che la somma di due lati AC, AB di esso stia alla differenza tra AC ed AB come la tangente della metà della somma dei due angoli ABC, ACB opposti a que' lati alla tangente della metà della differenza de' medesimi angoli.

E poichè (§. 68.) sta AC : AB :: sen. ABC :

sen.ACB; sarà componendo AC + AB : AB :: sen. ABC + sen.ACB:sen.ACB; e dividendo i termini della prima analogia, si avrà AC — AB : AB :: sen. ABC — sen. ACB : sen. ACB , ed invertendo dovrà risultarne AB : AC — AB :: sen. ACB : sen. ABC — sen. ACB. Dunque le grandezze AC + AB , AB , ed AC — AB sono in proporzione ordinata colle altre sen. ABC + sen. ACB, sen. ACB , e sen. ABC — sen. ACB. E quindi, per equalità ordinata , dee stare

$$AC+AB : AC-AB :: \text{sen}ABC. + \text{sen}.ACB : \text{sen}.ABC - \text{sen}.ACB.$$

Ma (§. 50.) la ragione di sen. ABC + sen.ACB : sen. ABC—sen.ACB adegua quella di

$$\text{tang.}\left(\frac{ABC+ACB}{2}\right) : \text{tang.}\left(\frac{ABC-ACB}{2}\right).$$

Dunque dee stare pure

$$AC + AB : AC - AB :: \text{tang.}\left(\frac{ABC+ACB}{2}\right) : \text{tang.}\left(\frac{ABC-ACB}{2}\right).$$

C. B. D.

PROP. XVI. TEOR.

§. 70. *In ogni triangolo il doppio rettangolo contenuto da due lati sta alla somma de' quadrati di questi diminuita del quadrato del rimanente lato , come il raggio trigonometrico al coseno dell' angolo compreso dai primi due lati.*

Cioè nel triangolo BAC dee stare (*fig.* 8 *e* 9.)

$$2AB \times AC : BA^2 + AC^2 - BC^2 :: R : \cos. BAC.$$

Cas. I. Sia in primo luogo acuto l' angolo (*fig.* 8) BAC, e dal vertice B di uno degli altri due angoli del proposto triangolo si meni sul lato opposto AC la perpendicolare BD. Dovrà essere (13 El. II.)

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC \times AD.$$

Ma nel triangolo BDA rettangolo in D (§.66) sta R : cos. BAD :: BA : AD. Dunque dev' essere $AD = \frac{BA \cos. BAD}{R}$, e con ciò

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AC. \frac{BA \cos. BAD}{R}.$$

E quindi ne risulta

$$\cos. BAC = \frac{R\,(AB^2 + AC^2 - BC^2)}{2AB \times AC}$$

Il perchè dee stare

$$2AB \times AC : AB^2 + AC^2 - BC^2 :: R : \cos. BAC.$$

Cas. II. Suppongasi in secondo luogo, che l' angolo BAC sia (*fig.* 9) ottuso, e dal vertice B di uno de' rimanenti angoli si meni sul lato opposto AC la perpendicolare BD. Sarà (12 El. II.) $BC^2 = AB^2 + AC^2 + 2AC \times AD$.
Ma dal triangolo BAD rettangolo in D si ha

(§. 66.) $AD = \frac{BA \cos. BAD}{R}$: ed è poi (§.31.) $\cos. BAD = -\cos. BAC$. Dunque dev' essere pure

$$AD = -\frac{BA \cos. BAC}{R}; \text{ e quindi}$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{2AC \times AB \cos. BAC}{R};$$

dalla quale equazione si ottiene

$$\cos.BAC = \frac{R(AB^2+AC^2-BC^2)}{2AB\times AC} \quad \ldots (11)$$

Il perchè dee stare

$2AC\times AB:AB^2+AC^2-BC^2::R:\cos.BAC$. C.B.D.

§. 71. *Cor. I.* Se a ciascun membro dell'equazione (11) vi si aggiunga il raggio trigonometrico R, si ottiene

$$R+\cos.BAC = \frac{R.(AB^2+AC^2-BC^2)}{2AB\times AC}+R,$$

ovvero

$$R+\cos.BAC = \frac{R(AB^2+AC^2+2AB\times AC-BC^2)}{2AB\times AC}.$$

Ma nel §. 52 si è dimostrato, che $R+\cos.2\varphi$ adegua $\frac{2\cos.^2\varphi}{R}$, ed è poi $AB^2+AC^2+2AB\times AC = (AB+AC)^2$, come vien dimostrato nella Prop. 4. El. II. Dunque dev' essere

$$\frac{2\cos.^2\tfrac{1}{2}BAC}{R} = \frac{R((AB+AC)^2-BC^2)}{2AB\times AC},$$

e $$\cos.^2\tfrac{1}{2}BAC = \frac{R^2((AB+AC)^2-BC^2)}{4AB\times AC}.$$

Or poichè (5. El. II.) il rettangolo contenuto dalla somma e dalla differenza di due rette adegua la differenza de' quadrati di quelle stesse rette; perciò dev' essere $(AB+AC)^2-BC^2=(AB+AC+BC)(AB+AC-BC)$, e

$$\cos.^2\tfrac{1}{2}BAC = \frac{R^2(AB+AC+BC)(AB+AC-BC)}{4AB\times AC}.$$

Il perchè dev' essere

$$\cos.\tfrac{1}{2}\,BAC=\frac{R}{2}\sqrt{\left(\frac{(AB+AC+BC)(AB+AC-BC)}{AB\times AC}\right)}.$$

§. 72. *Cor. II.* Dal raggio trigonometrico R si tolga ora il primo ed ora il secondo membro dell' equazione (11); ne dovrà risultare

$$R-\cos.BAC=R-\frac{R(AB^2+AC^2-BC^2)}{2AC\times AB},$$

ovvero

$$R-\cos.BAC=\frac{R(BC^2-(AB^2+AC^2-2AC\times AB))}{2AC\times AB}.$$

Ma $R-\cos.BAC$ (§. 52.) adegua $\frac{2\text{sen.}^2\frac{1}{2}\,BAC}{R}$,

ed è poi (7. El. II.) $AB^2+AC^2-2AC\times AB=(AB-AC)^2$. Dunque dev' essere

$$\frac{2\text{sen.}^2\frac{1}{2}\,BAC}{R}=\frac{R(BC^2-(AB-AC)^2)}{2AC\times AB}.$$

E quindi si ha

$$\text{sen.}^2\tfrac{1}{2}\,BAC=\frac{R^2}{4}\left(\frac{BC^2-(AB-AC)^2}{AC\times AB}\right),$$

o sia

$$\text{sen.}^2\tfrac{1}{2}\,BAC=\frac{R^2}{4}\cdot\frac{(BC+AC-AB)(BC+AB-AC)}{AC\times AB},$$

e $\text{sen.}\tfrac{1}{2}\,BAC=$

$$\frac{R}{2}\sqrt{\left(\frac{(BC+AC-AB)(BC+AB-AC)}{AC\times AB}\right)}.$$

CAP. V.

DELLA RISOLUZIONE DE' TRIANGOLI RETTILINEI.

PROP. XVII. PROBL.

§. 73. *In un triangolo rettangolo diasi un lato, ed un' altra parte ad arbitrio; determinare le rimanenti parti.*

Cas. I. Nel triangolo (*fig.* 7.) BAC rettangolo in A sieno dati i lati AB, AC, che comprendono l'angolo retto; fa d'uopo determinare gli angoli B e C, e l'ipotenusa BC.

Si faccia BA:AC::R:tang.ABC. Da questa proporzione si renderà nota (§. 67.) la tangente dell' angolo ABC; e per mezzo delle tavole logaritmiche dei seni si determinerà l'angolo ABC. E quindi resterà determinato l'angolo BCA, che di ABC n'è complemento. In oltre, se facciasi cos.B:R::BA:BC; si farà noto (§. 66.) il valore di BC, che potrà eziandio determinarsi prendendo la somma dei quadrati di AB e di AC, e di poi da tale somma estraendo la radice quadrata; questa radice ne dinoterà il valore di BC, che sarà esatta, se la somma di quei due quadrati sia parimente un quadrato.

Cas. II. Sieno dati in secondo luogo il lato BC, che è opposto all' angolo retto A, ed il lato AB. Per determinare l'angolo B dovrà farsi BC:BA::R:cos.B: e di quì si farà pur noto l'angolo C. In oltre, si potrà determinare il lato CA indipendentemente dall' angolo B mediante l'equazione $AC=\sqrt{(BC^2-AB^2)}$, di cui il secondo membro potrà calcolarsi per mezzo dei logaritmi ponendolo sotto la forma $\sqrt{((BC+AB)(BC-AB))}$.

Cas. III. Sieno dati il lato AB e l'angolo acuto B. Sarà dato altresì l'angolo C, che è complemento dell'altro B. Per determinare il lato AC dovrà farsi questa proporzione; cioè a dire R:tang.B:: AB:AC: e l'ipotenusa BC si otterrà mediante l'analogia cos.B:R::AB:BC.

Cas. IV. Finalmente sieno dati il lato BC, che sottende l'angolo retto A, e l'angolo acuto B. Si farà pur noto l'angolo C. Per determinare il lato CA dovrà farsi questa proporzione; cioè a dire R:sen.B::BC:CA, e l'altro lato AB si otterrà dall'analogia R:cos.B::BC:BA. . . C.B.F.

PROP. XVIII. PROBL.

§. 74. *Dati di un triangolo obliquangolo un lato e due delle altre parti; fa d'uopo determinare le rimanenti parti di esso.*

Cas. I. Nel triangolo obliquangolo (*fig.* 8) ABC sieno dati il lato AB e gli angoli A e C, e con ciò anche il rimanente ABC, determinare i lati BC, CA.

Si faccia sen.C:sen.A::BA:BC, e sen.C:sen. ABC::AB:AC. Da queste due analogie si avranno i valori di BC e di AC.

Cas. II. Sieno dati i lati AB, BC e l'angolo C opposto al primo di essi; determinare l'angolo A, l'angolo ABC, ed il lato AC.

Si faccia AB:BC::sen.C:sen.A (§.68). Se l'angolo C sia sotteso dal maggiore dei due lati AB, BC; da questa proporzione si farà noto l'angolo A, che dovendo essere minore del dato ACB, è sempre acuto. E quindi si farà pur noto l'angolo ABC.

Che se poi in vece dell' angolo C diasi l' angolo in A, che sottende il minore dei due lati dati; in tal caso la specie dell' angolo opposto al lato AB sarà dubbia. In fatti se col centro B ed intervallo BC si descriva il cerchio CFE; questo dovrà intersegare la CA in un punto E, che trovasi tra C ed A. Onde congiungendo la BE risulterà l' angolo BCA uguale all' altro BEC e con ciò supplemento dell' angolo BEA. Ma un angolo e 'l supplemento di esso hanno uguali seni. Dunque se facciasi BC:BA::sen.A ad un quarto; questo dovrà dinotarne tanto il seno dell' angolo BCA, che quello dell' altro BEA: e quindi resterà indeterminata la specie del triangolo da risolversi.

Che se conoscasi la specie dell' angolo BCA, e si vogliano determinare l' angolo ABC ed il AC; converrà togliere da 180° la somma degli angoli BAC, BCA; ciò che resta sarà l' angolo ABC. Onde facendo la proporzione sen.A: sen.ABC::BC:AC; si avrà il lato AC.

Cas. III. Sieno dati i due lati AB, BC e l' angolo ABC da essi compreso; determinare il lato AC e gli angoli A e C.

Da 180° si tolga l' angolo ABC; il residuo dovrà pareggiare la somma degli angoli BAC,BCA. Onde se facciasi AB+BC:AB—BC::tang.$\frac{1}{2}$ (A+C) ad un quarto; questo (§. 69) sarà uguale a tang. $\frac{1}{2}$ (C—A). E da ciò si farà nota la semidifferenza degli angoli A e C. Il perchè se alla semisomma $\frac{1}{2}$ (A+C) degli angoli A e C vi

si aggiunga la semidifferenza di essi $\frac{1}{2}$ (C—A), si avrà l'angolo maggiore C: e se dalla semisomma $\frac{1}{2}$ (C+A) se ne tolga la semidifferenza $\frac{1}{2}$ (C—A), si avrà l'angolo minore A. Laonde per determinare il rimanente lato AC, converrà fare questa proporzione sen.ACB:sen.ABC::AB: AC (§. 68.).

Cas. IV. Sieno dati finalmente i tre lati del triangolo ABC; fa d'uopo determinare gli angoli di esso.

Essendo noti i lati del triangolo ABC si potrà determinare cos. $\frac{1}{2}$A, o sen. $\frac{1}{2}$A per mezzo di una delle seguenti equazioni (§§. 71, e 72); cioè

$$\cos.\tfrac{1}{2}A = \frac{R}{2}\sqrt{\left(\frac{(AB+AC+BC)(AB+AC-BC)}{AB\times AC}\right)}, \text{ e}$$

$$\text{sen}.\tfrac{1}{2}A = \frac{R}{2}\sqrt{\left(\frac{(BC+AC-AB)(BC+AB-AC)}{AC\times AB}\right)}$$

E quindi si farà noto l'angolo A. Onde per determinare uno dei rimanenti angoli, come per esempio l'angolo C, dovrà farsi la proporzione, che segue; cioè BC:BA::sen.A:sen.C.

§. 75. *Scol.* Ottenendosi per approssimazione i valori della più parte delle linee trigonometriche (§§. 45, e 59), non che quelli dei logaritmi di esse; l'è chiaro, che si debbano avere eziandio per approssimazione la maggior parte dei risultamenti, che dalle operazioni trigonometriche ne derivano.

INSTITUZIONI

DELLA

TRIGONOMETRIA SFERICA

CAP. I.

NOZIONI PRELIMINARI.

PROP. I. TEOR.

§. 76. *Se una sfera si seghi con un piano; la comune sezione di questo colla superficie sferica sarà la circonferenza di un cerchio.*

La sfera (*fig.* 10.) ABDE si seghi col piano BGE; dico, che la intersezione di questo colla superficie sferica ABDE sia la circonferendi un cerchio.

Dal centro C della sfera ABDE si meni al piano segante BGE la perpendicolare CF, la quale si protragga da ambe le parti, sinchè ne incontri la superficie sferica nei punti A e D, e dal punto F si distenda nel piano segante la retta FB, la quale incontri la superficie sferica nel punto B. Sarà (Def. III. El. XI.) BF perpendicolare ad AD. Or se il semicerchio descritto sul diametro AD si faccia rivolgere intorno ad AD, esso dovrà generare la proposta sfera. Il perchè se tal semicerchio si descriva nel piano delle due DA, FB, ed insieme con esso intorno alla DA vi si aggiri pure la FB; que-

sta essendo sempre perpendicolare alla DA dovrà descrivere un cerchio, e 'l punto B ne descriverà la periferia. Ma il punto B si trova sempre nel piano segante BGE e nella superficie sferica ABDE. Dunque la commune sezione del piano BGE colla superficie sferica ABGE è la periferia di un cerchio. C. B. D.

§. 77. *Cor. I.* Il centro F del cerchio EGB, ch'è la sezione fatta da un piano colla superficie della sfera ABDE, è il punto d'incontro del piano della sezione e della perpendicolare abbassata su di esso dal centro della sfera.

§. 78. *Cor. II.* Dunque se una sfera si seghi con piani paralleli; i centri de' cerchi, che sono le intersezioni fatte dai piani seganti, debbono essere i punti d'incontro di essi piani col diametro della sfera, che gli è perpendicolare.

§. 79. *Cor. III.* Essendo il quadrato di FB uguale a quello di CB diminuito dell' altro di CF; l'è chiaro, che la FB debba diminuire a misura che si aumenta la CF, e debba crescere a misura che diminuisce la CF. Ma la CF sparisce qualora il piano segante BGE ne passa pel centro C della sfera. Dunque *di tutt' i cerchi, che sono le sezioni fatte da' piani con una sfera, quelli hanno il massimo raggio, i cui piani passano pel centro della sfera.*

§. 80. *Def. I. I cerchi massimi di una sfera* sono quelli, che si ottengono segando la sfera con piani distesi pel centro di essa: ed i *cerchi minori di una sfera* sono que' cerchi, che si hanno segando la sfera con piani, che non passano pel centro di essa.

§. 81. *Cor. I.* Dunque per due punti, che non sono per dritto col centro della sfera, vi passa un sol cerchio massimo (2. El. XI.).

§. 82. *Cor. II.* La comune sezione di due cerchi massimi di una sfera dee passare pel centro comune di quei cerchi, ch'è anche centro della sfera. Dunque tal sezione dev' essere un diametro della sfera.

§. 83. *Cor. III.* Il perchè due cerchi massimi di una sfera intersecandosi nel comune diametro, debbono dividersi scambievolmente per metà.

§. 84. *Def. II. L' asse di un cerchio massimo di una sfera* è quel diametro di questa, ch' è perpendicolare al piano di esso cerchio massimo: e gli estremi di un tal diametro si dicono *poli* non solo dello stesso cerchio massimo, ma eziandio di quegli altri cerchi della sfera, che sono paralleli al medesimo cerchio massimo.

§. 85. *Cor. I.* E poichè una retta, ch' è perpendicolare ad un piano, non può essere eziandio perpendicolare ad un altro piano, che ne interseca il primo; l'è chiaro, che due cerchi massimi di una sfera non possono avere il medesimo asse, nè gli stessi poli.

§. 86. *Cor. II.* In oltre, poichè ogni angolo retto vien misurato dalla quarta parte della circonferenza di un cerchio, cioè dall' arco di 90°; l' è chiaro, che se per l' asse di un cerchio massimo si distenda un altro cerchio massimo, ogni arco di questo, ch' è tra un polo e la circonferenza di quel primo cerchio massimo, debba essere di 90°.

§. 87. *Def. III. L' angolo sferico* è la scambievole inclinazione di due archi di cerchi massimi nella superficie di una sfera.

§. 88. *Cor. I.* Dunque se pel vertice (*fig.*

11.) A di un angolo sferico BAC si tirino ai lati AB, AC di esso le tangenti AH, AK; l'angolo contenuto da queste sarà quanto l'angolo sferico BAC. Ma le due rette AH, AK sono perpendicolari al diametro AF, nel quale s'intersegano i due cerchi massimi ABF, ACF, e di esse la prima trovasi nel piano ABF, la seconda nel piano ACF. Dunque (Def. VI. El. II.) l'angolo HAK dee misurare l'inclinazione del piano ABF all'altro ACF. Vale a dire, che *ogni angolo sferico è dello stesso numero di gradi e minuti dell' angolo d' inclinazione de' piani, ne' quali sono gli archi, che lo contengono.*

§. 89. *Cor. II.* E di quì si rileva, 1.° *che gli angoli sferici fatti intorno ad un punto di una superficie sferica sono insieme presi uguali a quattro retti*; 2.° *che sono uguali a due retti gli angoli sferici conseguenti*; 3° *e che gli angoli sferici verticali sono tra se uguali.*

§. 90. *Def. IV.* Il *triangolo sferico* è quella porzione della superficie di una sfera, ch' è contenuta da tre archi di cerchi massimi.

§. 91. *Def. V.* I numeri, che rispettivamente ne dinotano i lati e gli angoli di un triangolo sferico, si dicono *parti* di tal triangolo.

§. 92. *Def. VI.* La *risoluzione* di un triangolo sferico consiste nel determinare tre parti di esso, essendo date le altre tre.

§. 93. *Def. VII. La trigonometria sferica* è quella scienza, che ha per soggetto la risoluzione dei triangoli sferici.

PROP. II. TEOR.

§. 94. *Se per due punti della superficie di una sfera, che non sieno gli estremi di alcun diametro di essa, si facciano passare il cerchio massimo ed altri cerchi minori; la minima distanza di que' punti sulla superficie della sfera dev' essere l' arco del cerchio massimo minore della semicirconferenza, e ch' è tra que' punti.*

Sieno (*fig.* 12.) ABC, HBK due cerchi, che si tocchino al di dentro nel punto B, e si congiungano i centri G ed F di essi colla retta GF, che si protragga insino al punto del contatto B. Di poi nel cerchio minore HBK si distenda la corda HEK perpendicolare ad FB in un punto E, ch' è tra F e B, e per K si tiri la KC parallela a BG, e pel punto C, dov'essa incontra la circonferenza del cerchio CBA, si meni la CDA parallela a KH. Sarà CD uguale a KE, e l' intiera CA sarà uguale alla KH. Intanto si concepisca, che il circolo KBH ne progredisca in modo che il centro F di esso ne percorra la retta FB, e la KH si mantenga sempre perpendicolare ad FB. Sarà chiaro, che pervenendo il punto K nell' altro C, il punto H debba cadere sull' altro A, e l'arco KBH dovrà comprendere l' altro CBA, e sarà maggiore di esso. Il perchè se ABC sia il cerchio massimo di una sfera, ed HBK un cerchio minore, adattandosi la HK sulla AD, e 'l cerchio HBK sulla superficie della sfera; la distanza del punto H dall' altro C sulla superficie della sfera per l' arco ABC sarà minore che per l' arco HBK. Dunque ec. C. B. D.

DI ALCUNE PROPRIETA' DE' TRIANGOLI SFERICI.

PROP. III. TEOR.

§. 95. *Ogni lato di un triangolo sferico è minore della semicirconferenza.*

Poichè i cerchi massimi (*fig.* 11.) ABF, ACF si segano scambievolmente per metà (§.83); egli è chiaro, che i lati AB, AC dell' angolo sferico BAC debbano esserne intersegati da un altro cerchio massimo ECG prima d' incontrarsi nell' altro punto F, affinchè si possa costituire il triangolo sferico. Dunque ciascuno de' lati AB, AC del triangolo sferico ABC dev' essere minore della mezza circonferenza. Lo stesso potrà dimostrarsi per l' altro lato BC. C. B. D.

§. 96. *Cor.* Dunque se dal centro O della sfera AEFG ai vertici A, B, C degli angoli di un qualunque triangolo sferico si tirino i raggi OA, OB, OC; questi a due a due debbono comprendere angoli, che essendo in piani distesi pel centro della sfera, debbono formare un angolo solido, di cui i tre angoli piani, che lo costituiscono, sono misurati dai rispettivi lati del triangolo sferico ABC. E quindi essendo due di quegli angoli in qualsivoglia modo presi sempre maggiori del rimanente (20 El. XI), e tutti e tre insieme presi sempre minori di quattro retti (21 El. XI); l' è chiaro, 1° che *di ogni triangolo sferico due lati in qualsivoglia modo presi sono sempre maggiori del rimanente*, 2° *e che i tre lati di un triangolo sferico insieme presi sono sem-*

pre minori della circonferenza di un cerchio massimo della sfera.

PROP. IV. TEOR.

§. 97. *Se nella superficie di una sfera si descrivano tre cerchi massimi, che abbiano per poli i vertici degli angoli di un triangolo sferico descritto su di essa; tali cerchi massimi incontrandosi costituiranno un triangolo sferico, di cui i lati e gli angoli saranno rispettivamente supplementi degli angoli e de' lati del triangolo sferico proposto.*

Nella superficie della sfera, cui appartiene il triangolo sferico (*fig.* 13.) ABC, si descrivano tre cerchi massimi, che abbiano per poli i vertici A, B, C degli angoli del proposto triangolo sferico, e che s'interseghino nei punti D, E, F. Dico, che i lati e gli angoli del triangolo sferico DEF sieno rispettivamente supplementi degli angoli e de' lati del triangolo sferico ABC.

Poichè essendo A polo del cerchio massimo DE, dev' essere un quadrante l'arco di cerchio massimo disteso pe' punti A ed E. E quindi il raggio della sfera disteso pel punto E dev' essere perpendicolare a quello, che passa pel punto A. Nello stesso modo si dimostra, che il raggio della sfera disteso pel punto E l'è perpendicolare a quello disteso pel punto B. Il perchè il raggio della sfera disteso pel punto E dev'essere perpendicolare al piano del cerchio massimo GABH (4. El. XI.). E quindi dev' essere l'arco GH di tanti gradi e minuti per quanti se ne contengono nell' angolo sferico GEH (§. 88.). Ma essendo A polo del cerchio massimo DE,

e B polo del cerchio massimo FE, dev' essere di 90° tanto l' arco AH, che l'altro BG (§.86.). Dunque i due archi AH, BG, o sia i due AB, GH insieme presi sono di 180°. E quindi l'arco GH, che misura l' angolo GEH, dev' essere supplemento del lato AB del proposto triangolo sferico ABC.

In oltre, siccome si è dimostrato, che il punto E è polo del cerchio massimo GH, così pure si può dimostrare, che il punto D è polo del cerchio massimo ACK. E quindi dev'essere di 90° tanto l' arco EH, che l' altro DK. Il perchè dev'essere di 180° la somma degli archi EH, DK, ovvero degli altri DE, HK. Ma l' arco HK misura l' angolo sferico BAC (§.88.), per esserne A polo del cerchio massimo DE. Dunque l' arco HK, che misura l' angolo sferico BAC, dev' essere supplemento del lato DE del triangolo sferico DEF. E perciò se nella superficie di una sfera ec. C. B. D.

§. 98. *Def. V.* I triangoli sferici di una stessa sfera si dicono l' uno *supplementale* dell' altro, se i lati e gli angoli di uno di essi sieno rispettivamente supplementi degli angoli e dei lati dell' altro.

§. 99. *Cor.* Dunque gli angoli di un triangolo sferico ed i lati del triangolo supplementale debbono insieme contenere tanti gradi, quanti se ne contengono in tre semicirconferenze, cioè 540°.

PROP. V. TEOR.

§. 100. *I tre angoli di un triangolo sferico insieme presi sono sempre minori di sei retti, e maggiori di due retti.*

Essendo gli angoli di un triangolo sferico ed i lati del triangolo supplementale insieme presi uguali a 540°, cioè a sei retti; l'è chiaro, che i soli angoli del triangolo sferico debbano essere minori di sei retti. Ma i lati del triangolo supplementale sono minori della circonferenza di un cerchio massimo (§. 96.), cioè di un arco, che misura quattro retti. Dunque gli angoli di un triangolo sferico debbono essere uguali a sei retti minorati di angoli, che insieme sono minori di quattro retti; e perciò quelli del triangolo sferico debbono essere maggiori di due retti. C. B. D.

§. 101. *Cor. I.* Dunque se un triangolo sferico abbia un angolo retto; ciascuno de' rimanenti angoli potrà essere retto, ottuso, o pure acuto. Che se di un triangolo sferico un angolo sia retto, e gli altri due sieno acuti; questi insieme presi dovranno essere maggiori del retto (§. 100.).

§. 102. *Cor. II.* In oltre, se di un triangolo sferico se ne conoscano due angoli, non sì potrà da essi determinare il valore del terzo angolo. E perciò i tre angoli di un triangolo sferico formano tre dati distinti, e non già due, come ne' triangoli rettilinei.

§. 103. *Scol.* Colle lettere A, B, C verranno in seguito dinotati gli angoli di un triangolo sferico, ai vertici de' quali esse saranno scritte; e colle lettere *a*, *b*, *c* ne saranno dinotati i lati rispettivamente opposti agli angoli A, B, C.

PROP. VI. TEOR.

§. 104. *In ogni triangolo sferico i seni dei lati sono come i seni degli angoli ad essi opposti.*

Sia (*fig.* 14.) O il centro della sfera, nella cui superficie sia formato il triangolo sferico ABC. Dico, che debba stare sen.a : sen.b :: sen.A : sen.B, sen.b : sen.c :: sen.B : sen.C, e sen.a : sen.c :: sen.A : sen.C.

Si congiungano le rette OA, OB, OC, e dal punto C si meni la retta CE perpendicolare al piano OAB, e dal punto E si abbassino le rette ED, EF perpendicolari alle OA, OB rispettivamente. Si congiungano le due rette CD, CF.

E poichè la retta CE è perpendicolare al piano OAB; sarà (18. El. XI.) perpendicolare al medesimo tanto il piano CDE, che l'altro CEF. Ma la retta OD, che giace nel piano OAB, è perpendicolare alla DE, comune sezione dei piani OAB, CDE. Dunque dev' essere (Def. IV. El. XI.) la OD perpendicolare al piano CED, e con ciò alla retta CD, che giace in esso piano e l'incontra. Il perchè dev' essere CD il seno dell' arco CA, o sia sen.b. Nello stesso modo si dimostra, che sia CF il seno del lato CB, o sia sen.a. In oltre, poichè le rette CD, DE sono perpendicolari elevate da un medesimo punto D della comune sezione OA de' due piani COA, BOA, e distese una in un piano e l'altra nell' altro; dovrà essere l'angolo CDE da esse formato uguale all' inclinazione del piano CAO all' altro BAO, cioè all' angolo sferico CAB. Nello stesso modo si dimostra, che l'angolo CFE pareggi l'angolo sferico CBA. Or poichè nel triangolo rettilineo CFE rettangolo in E (§.66.) sta CF a CE come il raggio trigonometrico R al seno dell' angolo CFE, e nell' altro triangolo rettilineo CDE rettangolo in E sta pure CE a

CD come il seno dell'angolo CDE al raggio trigonometrico; dovrà stare, per equalità perturbata, CF a CD come il seno dell'angolo CDE al seno dell'angolo CFE, cioè sen.a : sen.b :: sen.A : sen.B. Nello stesso modo si potrà dimostrare, che stia sen.b : sen.c :: sen.B : sen.C, e sen.a : sen.c :: sen.A : sen.C. C. B. D.

§. 105. *Cor.* Dalla dimostrazione del precedente Teorema si rileva, che debba essere

$$\text{sen.}a \ \text{sen.B} = \text{sen.}b \ \text{sen.A},$$

$$\text{sen.}b \ \text{sen.C} = \text{sen.}c \ \text{sen.B},$$

e $$\text{sen.}c \ \text{sen.A} = \text{sen.}a \ \text{sen.C}.$$

PROP. VII. TEOR.

§. 106. *Il coseno di un qualunque lato di un triangolo sferico pareggia il prodotto dei coseni degli altri due lati diviso pel raggio, aggiuntovi il prodotto dei seni de' medesimi lati multiplicato pel coseno dell' angolo da essi compreso diviso pel quadrato del raggio.*

Sia ABC un qualunque triangolo sferico, ed O il centro della sfera, nella cui superficie esso trovasi descritto. Dico, che debba essere

$$\cos.a = \frac{\cos.b \ \cos.c}{R} + \frac{\text{sen.}b \ \text{sen.}c \ \cos.A}{R^2}.$$

Si faccia la medesima costruzione della Prop. prec., e dal punto D si meni la DG perpendicolare ad OB, e per E si distenda la retta EH parallela ad OB. Sarà retto l'angolo EHD al pari dell'altro OGD, e la figura EHGF sarà un rettangolo. Dunque la EH dovrà pareggiare la FG.

Or poichè l' angolo retto EDO adegua i due angoli GDO , GOD , che insieme presi fanno un retto , se tolgasi il comune angolo GDO , dovrà restarvi l' angolo EDH uguale all' altro GOD. Il perchè essendo (§.66.) il raggio trigonometrico R al coseno dell'angolo CDE come CD a DE, o sia

R:cos.A::sen.b:DE; dovrà essere $\mathrm{DE}=\frac{\mathrm{sen}.b\cos.\mathrm{A}}{\mathrm{R}}$.

Ma sta pure (§.66.) R:sen.EDH::DE:EH, o sia R: sen. c :: $\frac{\mathrm{sen}.b\cos.\mathrm{A}}{\mathrm{R}}$: EH. Dunque dev' essere EH, ovvero

$$\mathrm{FG}=\frac{\mathrm{sen}.b\,\mathrm{sen}.c\cos.\mathrm{A}}{\mathrm{R}^2}.$$

In oltre , poichè sta R a cos.DOG come OD ad OG , ed è cos.DOG=cos.c, ed OD=cos.b ; dee star pure R : cos.c :: cos.b : OG. Il perchè dev' essere

$$\mathrm{OG}=\frac{\cos.b\cos.c}{\mathrm{R}}.$$

E quindi essendo FO, ovvero cos.a uguale ad OG+FG , dev' essere

$$\cos.a=\frac{\cos.b\cos.c}{\mathrm{R}}+\frac{\mathrm{sen}.b\,\mathrm{sen}.c\cos.\mathrm{A}}{\mathrm{R}^2}\ldots(1)$$

Nello stesso modo si potrà dimostrare , che sia

$$\cos.b=\frac{\cos.a\cos.c}{\mathrm{R}}+\frac{\mathrm{sen}.a\,\mathrm{sen}.c\cos.\mathrm{B}}{\mathrm{R}^2}\ldots(2),$$

e $$\cos.c=\frac{\cos.a\cos.b}{\mathrm{R}}+\frac{\mathrm{sen}.a\,\mathrm{sen}.b\cos.\mathrm{C}}{\mathrm{R}^2}\ldots(3).$$

C. B. D.

§. 107. *Cor. I.* Suppongasi, che il lato a del triangolo sferico ABC sia uguale all' altro b. Sarà $\cos.a = \cos.b$, e saranno tra se uguali i secondi membri dell'equazioni (1) e (2) del §. prec. Ma i primi termini di que' secondi membri risultano tra se uguali, ed uguali risultano eziandio i fattori $\frac{\text{sen}.b\,\text{sen}.c}{R^2}$, e $\frac{\text{sen}.a\,\text{sen}.c}{R^2}$ de' secondi termini di essi. Dunque dev' essere eziandio $\cos.A = \cos.B$, e quindi l' angolo A uguale all' altro B. Vale a dire, *che in ogni triangolo sferico isoscele sono tra se uguali gli angoli opposti ai lati uguali.*

§. 108. *Cor. II.* Nello stesso modo potrà dimostrarsi, che *ogni triangolo sferico equilatero è pure equiangolo.*

§. 109. *Cor. III.* Suppongasi, che ciascuno dei lati a e b del triangolo sferico ABC sia di 90°. Sarà $\cos.a = \cos.b = 0$, e $\text{sen}.a = \text{sen}.b = R$, e l' equazioni (1) e (2) del §. 106. si dovranno ridurre alle seguenti

$$0 = \frac{\text{sen}.c\cos.A}{R}, \text{ e } 0 = \frac{\text{sen}.c\cos.B}{R}.$$

E perciò dev' essere uguale a zero tanto cos.A, che cos.B. Dunque dev' essere retto ciascuno degli angoli A e B.

§. 110. *Cor. IV.* Nell' equazione

$$\cos.a = \frac{\cos.b\cos.c}{R} + \frac{\text{sen}.b\,\text{sen}.c\cos.A}{R^2}$$ in luogo

di cos. c si ponga $\frac{\cos.a\cos.b}{R} + \frac{\text{sen}.a\,\text{sen}.b\cos.C}{R^2}$,

e (§.105.) $\frac{\text{sen.}a\ \text{sen.C}}{\text{sen.A}}$ per sen.c. Dovrà risultarne $\cos.a = \frac{\cos.b}{\text{R}}\left(\frac{\cos.a\ \cos.b}{\text{R}} + \frac{\text{sen.}a\ \text{sen.}b\ \cos.\text{C}}{\text{R}^2}\right)$

$$+ \frac{\text{sen.}b\,\text{sen.}a\ \text{sen.C}\cos.\text{A}}{\text{R}^2\text{sen.A}};$$

cioè

$$\cos.a = \frac{\cos.a\ \cos.^2b}{\text{R}^2} + \frac{\text{sen.}a\ \text{sen.}b\ \cos.b\ \cos.\text{C}}{\text{R}^3}$$

$$+ \frac{\text{R}\text{sen.}b\ \text{sen.}a\ \text{sen.C}\ \cos.\text{A}}{\text{R}^3\text{sen.A}}.$$

Ma l' è $\cos.^2b = \text{R}^2 - \text{sen.}^2b$. Dunque dev' essere pure $\cos.a = \cos.a - \frac{\cos.a\ \text{sen}^2b}{\text{R}^2}$

$$+ \frac{\text{sen.}a\text{sen.}b\cos.b\cos.\text{C}}{\text{R}^3} + \frac{\text{sen.}b\ \text{sen.}a\ \text{sen.C}}{\text{R}^3}\cot.\text{A};$$

e quindi

$$\frac{\text{sen.}b\ \text{sen.}a\ \text{sen.C}}{\text{R}^3}\cot.\text{A} = \frac{\cos.a\ \text{sen.}^2b}{\text{R}^2}$$

$$- \frac{\text{sen.}a\ \text{sen.}b\ \cos.b\ \cos.\text{C}}{\text{R}^3},$$ e dividendo ambi i

membri di quest' ultima equazione per

$\frac{\text{sen.}b\ \text{sen.}a\ \text{sen.C}}{\text{R}^3}$, dovrà risultarne

$$\text{cot.A} = \frac{\text{sen.}b\ \text{cot.}a}{\text{sen.C}} - \frac{\text{cos.}b\text{cot.C}}{\text{R}} \quad \ldots \ (4).$$

Che se nell'equazione (1) del §. 106. in luogo di cos.b si fosse sostituito il valore di esso dato dall' equazione (2), ed in luogo di sen.c si fosse

sostituito $\frac{\text{sen.}\ c\ \text{sen.B}}{\text{sen.C}}$ (§. 105.), si sarebbe pervenuto all' equazione

$$\text{cot.A} = \frac{\text{sen.}c\ \text{cot.}a}{\text{sen.B}} - \frac{\text{cos.}c\ \text{cot.B}}{\text{R}} \quad \ldots \ (5).$$

Nello stesso modo si potrà rilevare, che sia

$$\text{cot.B} = \text{cot.}b\ \frac{\text{sen.}a}{\text{sen.C}} - \frac{\text{cos.}a\ \text{cot.C}}{\text{R}} \quad \ldots \ (6),$$

$$\text{cot.B} = \text{cot.}b\ \frac{\text{sen.}c}{\text{sen.A}} - \frac{\text{cos.}c\ \text{cot.A}}{\text{R}} \quad \ldots \ (7),$$

$$\text{cot.C} = \text{cot.}c \frac{\text{sen.}a}{\text{sen.B}} - \frac{\text{cos.}a\text{cot.B}}{\text{R}} \quad \ldots \ (8),$$

e $$\text{cot.C} = \text{cot.}c \frac{\text{sen.}b}{\text{sen.A}} - \frac{\text{cos.}b\ \text{cot.A}}{\text{R}} \quad \ldots \ (9);$$

§. 111. *Cor. V.* Se ambi i membri dell'equazione (4) (§. prec.) si multiplichino per

$\frac{\text{sen.}C}{\text{sen.}b}$, dovrà risultarne

$$\frac{\text{sen.}C\ \text{cot.}A}{\text{sen.}b}=\text{cot.}a-\frac{\text{cot.}b\ \text{cos.}C}{R}\text{ ; e quindi}$$

$$\text{cot.}a=\frac{\text{sen.}C\ \text{cot.}A}{\text{sen.}b}+\frac{\text{cot.}b\ \text{cos.}C}{R}\ \ldots\ (10).$$

Nello stesso modo si potrà dimostrare, che debba essere

$$\text{cot.}a=\frac{\text{sen.}B\ \text{cot.}A}{\text{sen.}c}+\frac{\text{cot.}c\ \text{cos.}B}{R}\ \ldots\ (11),$$

$$\text{cot.}b=\frac{\text{sen.}C\ \text{cot.}B}{\text{sen.}a}+\frac{\text{cot.}a\ \text{cos.}C}{R}\ \ldots\ (12),$$

$$\text{cot.}b=\frac{\text{sen.}A\ \text{cot.}B}{\text{sen.}c}+\frac{\text{cot.}c\ \text{cos.}A}{R}\ \ldots\ (13),$$

$$\text{cot.}c=\frac{\text{sen.}A\ \text{cot.}C}{\text{sen.}b}+\frac{\text{cot.}b\ \text{cos.}A}{R}\ \ldots\ (14),$$

$$\text{e}\ \text{cot.}c=\frac{\text{sen.}B\ \text{cot.}C}{\text{sen.}a}+\frac{\text{cot.}a\ \text{cos.}B}{R}\ \ldots\ (15).$$

PROP. VIII. TEOR.

§. 112. *In ogni triangolo sferico il coseno di un angolo adegua il coseno del lato opposto multiplicato pel prodotto dei seni degli altri due angoli diviso pel quadrato del rag-*

gio, toltone il prodotto dei coseni di questi stessi angoli diviso pel raggio.

Sieno A, B, C gli angoli di un triangolo sferico, di cui i lati opposti si dinotino con a, b, c: e sieno A', B', C' gli angoli del triangolo supplementale del proposto, ed a', b', c' i lati dello stesso triangolo supplementale. Dovrà essere (§. 98.) $a'=180°-A$, $b'=180°-B$, $c'=180°-C$, ed $A'=180°-a$. E quindi sarà $\cos.a'=-\cos.A$; $\cos.b'=-\cos.B$, $\cos.c'=-\cos.C$, $\text{sen}.b'=\text{sen}.B$, $\text{sen}.c'=\text{sen}.C$, e $\cos.A'=-\cos.a$

Ma l'è (§. 106.)

$$\cos.a'=\frac{\cos.b'\cos.c'}{R}+\frac{\text{sen}.b'\text{sen}.c'\cos.A'}{R^2}.$$

Dunque, sostituendo in quest' ultima equazione i valori di $\cos.a'$, $\cos.b'$, $\cos.c'$, $\text{sen}.b'$, $\text{sen}.c'$, e $\cos.A'$, dev' essere

$$-\cos.A=\frac{\cos.B\cos.C}{R}-\frac{\text{sen}.B\,\text{sen}.C\cos.a}{R^2},$$

$$\text{e}\quad\cos.A=\frac{\text{sen}.B\,\text{sen}.C\cos.a}{R^2}-\frac{\cos.B\cos.C}{R}\;..(16).$$

Nello stesso modo si potrà dimostrare, che sia

$$\cos.B=\frac{\text{sen}.C\,\text{sen}.A\cos.b}{R^2}-\frac{\cos.C\cos.A}{R}\;..(17),$$

$$\text{e}\quad\cos.C=\frac{\text{sen}.B\,\text{sen}.A\cos.c}{R^2}-\frac{\cos.B\cos.A}{R}\;..(18).$$

C. B. D.

§. 113. *Cor. I.* Sia l'angolo B uguale all'altro C. Saranno tra se uguali non solo i primi membri dell' equazioni (17) e (18), ma eziandio i secondi termini de' secondi membri. Il perchè dovrà essere

$$\frac{\text{sen.C sen.A cos.}b}{R^2} = \frac{\text{sen.B sen.A cos.}c}{R^2}.$$

Ma l'è $\frac{\text{sen.C sen.A}}{R^2} = \frac{\text{sen.B sen.A}}{R^2}$. Dunque dev' essere $\cos.b = \cos.c$, e quindi $b = c$. Vale a dire, che *se un triangolo sferico abbia due angoli uguali; i lati opposti ad essi angoli saranno anche tra se uguali.*

§. 114. *Cor. II.* Nello stesso modo si potrà dimostrare, che *se un triangolo sferico abbia tutti gli angoli tra se uguali; esso sarà equilatero.*

§. 115. *Cor. III.* Suppongasi, che sia retto ciascuno de' due angoli B e C. Sarà $\cos.B = 0$, $\cos.C = 0$, $\text{sen.B} = R$, e $\text{sen.C} = R$. Il perchè l'equazioni (17) e (18) si dovranno trasformare in queste altre

$$0 = \frac{\text{sen.A cos.}b}{R}, \text{ e } 0 = \frac{\text{sen.A cos.}c}{R},$$

le quali non potranno aver luogo se non sia $b = c = 90°$. Dunque *se un triangolo sferico abbia due angoli retti; ciascuno dei lati opposti ad essi angoli dovrà essere di 90°.*

PROP. IX. TEOR.

§. 116. *In ogni triangolo sferico all' angolo maggiore sta opposto il lato maggiore, ed al lato maggiore sta opposto l' angolo maggiore.*

Sia (*fig.* 15.) ABC un triangolo sferico; dico 1° che se l' angolo ABC sia maggiore dell' angolo ACB, debba essere il lato AC maggiore del lato AB, 2° e che se il lato AC sia maggiore dell' altro AB, debba essere l' angolo ABC maggiore dell' altro ACB.

Dim. Par. I. Sia l'angolo ABC maggiore dell' altro ACB, e pel punto B si distenda il cerchio massimo BD, che s' inclini all' altro BC sotto l' angolo DBC uguale all' altro DCB. Dovrà essere (§. 113.) l' arco BD uguale all' altro DC: ed aggiungendo ad essi l' arco DA, saranno i due archi BD, DA insieme uguali a tutto l' arco AC. Ma i due lati BD, DA del triangolo sferico BDA sono maggiori del terzo BA (§. 96. n.° 1.°). Dunque dev'essere l' arco AC maggiore dell' altro AB.

Par. II. Sia in secondo luogo il lato AC del triangolo sferico ABC maggiore del lato AB, Dico, che debba essere l' angolo ABC maggiore dell' altro ACB. Poichè se l' angolo ABC non è maggiore dell' altro ACB, gli sarà o uguale, o minore. Non potrà essergli uguale; poichè in tal caso sarebbe il lato AB uguale al lato AC (§. 113.): il che è contro all' ipotesi. Non potrà essere l' angolo ABC minore dell' altro ACB; poichè dovrebbe essere pure (Par. I.) il lato AB maggiore dell' altro AC; il che è contro alla supposizione. Dunque dev' essere l' angolo ABC maggiore dell' angolo ACB. C. B. D.

CAP. III.

PRINCIPII PER LA RISOLUZIONE DE' TRIANGOLI SFERICI RETTANGOLI.

§. 117. *Def. VIII.* Di ogni triangolo sferico rettangolo si dicono *parti circolari* i lati, che comprendono l' angolo retto, ed i complementi del lato opposto all' angolo retto e di ciascuno de' rimanenti angoli.

Così del triangolo sferico (*fig.* 14.) ABC rettangolo in A si dicono parti circolari i lati AB, AC, che comprendono l' angolo retto BAC, il complemento del lato BC, che sottende l' angolo retto BAC, ed i complementi degli angoli ABC, ACB.

§. 118. *Def. IX.* Qualunque delle parti circolari di un triangolo sferico rettangolo, che voglia considerarsi, chiamasi *parte media*: e le due parti circolari, che dall' una e dall' altra parte sono contigue alla media, si dicono *adjacenti* rispetto a quella, che si è presa per media; laddove le due rimanenti, che sono più distanti dalla media, si dicono parti *estreme opposte*.

§. 119. *Cor.* Dunque se prendasi per parte media di un triangolo sferico rettangolo BAC il complemento del lato BC opposto all' angolo retto A; le parti adjacenti saranno i complementi degli altri due angoli B e C, e le parti estreme opposte saranno i lati AB, AC, che comprendono l' angolo retto A. Che se prendasi per parte media il lato AB, ch' è uno di quelli, che comprendono l' angolo retto; le parti adjacenti saranno l' altro lato AC, ch' è intorno all' an-

golo retto A, e 'l complemento dell'angolo B opposto ad AC; laddove il complemento del lato BC opposto all'angolo retto A, e 'l complemento dell'angolo C saranno le parti estreme opposte.

PROP: X. TEOR.

§. 120. *In ogni triangolo sferico rettangolo il seno di ciascuna parte media è uguale al prodotto delle tangenti delle parti adjacenti diviso pel raggio: e lo stesso seno adegua il prodotto dei coseni delle parti estreme opposte diviso pel raggio.*

Dim. E poichè in ogni triangolo sferico l'è sempre (§. 106.)

$$\cos.a = \frac{\cos.b \cos.c}{R} + \frac{\text{sen}.b \,\text{sen}.c \cos.A}{R^2};$$

egli è chiaro, che se l'angolo A sia retto, debba divenirne cos. A=o, e

$$\cos.a = \frac{\cos.b \cos.c}{R}.$$

Dunque prendendo per parte media il complemento del lato a, ch' è opposto all'angolo retto A, il seno di essa pareggia il prodotto dei coseni delle parti estreme opposte diviso pel raggio.

Or essendo in ogni triangolo sferico (§. 112.)

$$\cos.A = \frac{\cos.a \,\text{sen}.B \,\text{sen}.C}{R^2} - \frac{\cos.B \cos.C}{R};$$

l'è manifesto, che se l'angolo A sia retto, debba essere cos.A=o, e con ciò

$$\frac{\cos.a\,\text{sen.B sen. C}}{R^2}=\frac{\cos.B\cos.C}{R}$$

cioè $\cos.a=\frac{R^2\cos.B\cos.C}{R\,\text{sen.B sen.C}}=\frac{R\cos.B}{\text{sen.B}}\cdot\frac{R\cos.C}{R\,\text{sen.C}}$,

o sia $\cos.a=\frac{\cot.B\cot.C}{R}$.

Dunque se prendasi il complemento del lato a opposto all' angolo retto per parte media; il seno di tal parte adegua il prodotto delle tangenti de' complementi degli angoli B e C, che sono le parti adjacenti, diviso pel raggio.

In oltre, poichè in ogni triangolo sferico si ha (§. 111.)

$$\cot.a=\cot.A\frac{\text{sen.B}}{\text{sen.}c}+\frac{\cot.c\cos.B}{R};$$

l' è chiaro, che se l' angolo A di tal triangolo sia retto, dovrà essere cot.A=o, e la precedente equazione si dovrà trasformare nella seguente

$$\cot.a=\frac{\cot.c\cos.B}{R},$$

dalla quale si ha

$$\cos.B=\frac{R.\cot.a}{\text{cotang.}c}.$$

Ma cot. c pareggia (§. 27.) $\frac{R^2}{\text{tang.}c}$. Dunque

dev' essere pure

$$\cos.B=\frac{\cot.a\tan g.c}{R}.$$

E perciò se prendasi per parte media il complemento dell'angolo B; il seno di tal parte pareggia il prodotto della tangente del complemento di a per la tangente del lato c divisa pel raggio.

Nello stesso modo si potrà dimostrare, che

debba essere $\cos.C=\frac{\cot.a\ \tan g.b}{R}.$

In oltre, essendo in ogni triangolo sferico (§.112).

$$\cos.B=\frac{\cos.b\,\text{sen}.A.\text{sen}.C}{R^2}-\frac{\cos.A.\cos.C}{R};$$

se facciasi l'angolo A di 90°, ne diviene sen. A=R, cos.A=o, e

$$\cos.B=\frac{\cos.b\ \text{sen}.C}{R}.$$

Dunque se il complemento dell' angolo B si prenda per parte media; il seno di tal parte dev'essere quanto il prodotto de' coseni delle parti estreme opposte diviso pel raggio.

Nello stesso modo si potrà dimostrare, che debba essere

$$\cos.C=\frac{\cos.c\,\text{sen}.B}{R}.$$

E poichè in ogni triangolo sferico si ha (§.111)

$$\cot.b = \frac{\cot.B\,\text{sen}A}{\text{sen}.c} + \frac{\cot.c\cos.A}{R};$$

l' è chiaro, che se l' angolo A sia di 90°, la precedente equazione dovrà trasformarsi in questa

$$\cot.b = \frac{R\cot.B}{\text{sen}.c}.$$

Ma cot. b adegua $\frac{R^2}{\text{tang}.b}$. Dunque dev' essere

$$\frac{R^2}{\text{tang}.b} = \frac{R\cot.B}{\text{sen}.c};\ \text{e quindi sen}.c = \frac{\text{tang}.b\cot.B}{R}$$

Vale a dire, che se prendasi il lato c per parte media; il seno di tal parte dev' essere uguale al prodotto delle tangenti delle parti adjacenti diviso pel raggio.

Nello stesso modo si dimostra, che sia

$$\text{sen}.\,b = \frac{\cot.\,C\ \text{tang}.c}{R},$$

Finalmente essendo in ogni triangolo sferico (§. 105.)

$$\text{sen}.A\ \text{sen}.c = \text{sen}.a\ \text{sen}.C;$$

se facciasi l' angolo A di 90°, ne risulta sen. A $=R$, e la precedente equazione si trasforma in questa

$$R\text{sen}.c = \text{sen}.a\text{sen}.C,$$

dalla quale si ha

$$\text{sen}.c = \frac{\text{sen}.a\text{sen}.C}{R}.$$

Dunque se prendasi per parte media il lato c; dev' essere il seno di tal parte uguale al prodotto dei coseni delle parti estreme opposte. Lo stesso potrà dimostrarsi prendendo il lato b per parte media. Dunque in ogni triangolo sferico rettangolo ec. C. B. D.

§. 121. *Cor. I.* E poichè nel triangolo sferico ABC, che ha retto l' angolo A, si ha,

$$\text{sen}.c = \frac{\text{cot.B. tang}.b}{\text{R}},$$

ed è $\text{cot.B} = \frac{\text{R}^2}{\text{tang.B}}$, dev' essere

$$\text{sen}.c = \frac{\text{R tang}.b}{\text{tang.B}}.$$

Il perchè dee stare tang.B : tang.b :: R:sen.c. Ma R e sen.c sono quantità positive. Dunque debbono essere dello stesso segno tang.B e tang.b; e perciò gli archi B e b debbono essere o uguali, o ciascuno minore, o ciascuno maggiore di 90°. Vale a dire, che *in ogni triangolo sferico rettangolo ciascuno de' lati, che sta dintorno all' angolo retto, è della stessa specie dell' angolo, che gli è opposto.*

§. 122. *Cor. II.* Essendo R : sen.c::tang.B: tang.b, ed R non minore di sen.c, sarà tang.B non minore di tang.b. Il perchè se l' angolo B sia minore di 90°, e con ciò positive le quantità tang.B e tang.b, dovrà essere l' arco, che misura l' angolo B maggiore dell' arco b. Che se poi l' angolo B sia maggiore di 90°, e perciò negative le quantità tang.B e tang.b; dovrà

essere l' arco, che misura l' angolo B minore dell' arco b. Dunque *in ogni triangolo sferico rettangolo ciascuno de' lati, che comprendono l' angolo retto, è minore o maggiore dell' angolo opposto, secondo che esso è minore o maggiore di 90°.*

C A P. IV.

PRINCIPII PER LA RISOLUZIONE DE' TRIANGOLI SFERICI OBLIQUANGOLI.

PROP. XI. LEMMA.

§. 123. *Il coseno della metà della somma de' tre angoli di un triangolo sferico diminuita di uno di essi angoli è sempre positivo. Ed è negativo il coseno della metà della somma de' tre angoli di esso triangolo.*

Dim. Part. I. Si dinotino con A, B, C gli angoli di un triangolo sferico. Saranno 180°—A, 180°—B, e 180°—C i lati del triangolo supplementale; e perciò uno di essi lati p. es. 180°—A sarà minore di 360°—B—C, ch' è la somma degli altri due. Il perchè se aggiungasi B+C—180° a ciascuna di quelle grandezze disuguali; dovrà risultarne B+C—A minore di 180°; e quindi dovrà essere $\frac{B+C-A}{2}$, o sia $\frac{B+C+A}{2}$ —A minore di 90°. Dunque dev' essere positivo il coseno di $\frac{B+C-A}{2}$.

Par. II. In oltre, poichè la somma degli

angoli di un triangolo sferico è sempre maggiore di 180° e minore di 540°; dev' essere $\frac{A+B+C}{2}$ sempre maggiore di 90° e minore di 270°. E perciò dev' essere negativo il coseno dell' angolo $\frac{A+B+C}{2}$. C. B. D.

PROP. XII. TEOR.

§. 124. *In ogni triangolo sferico il seno della metà di un angolo adegua il raggio trigonometrico multiplicato per la radice quadrata del prodotto del seno della metà della somma dei tre lati diminuita di uno di quelli, che comprendono lo stesso angolo, pel seno della metà della somma degli stessi tre lati diminuita dell' altro, ch' è intorno allo stesso angolo, divisa per la radice quadrata del prodotto dei seni dei lati, che comprendono quell' angolo.* Cioè dev' essere

$$\text{sen.}\tfrac{1}{2}\text{A}=\text{R}\sqrt{\left(\frac{\text{sen.}\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\text{sen.}\left(\frac{a+c-b}{2}\right)}{\text{sen.}b\ \text{sen.}c}\right)}$$

Dim. Essendo $\cos.a=\frac{\cos.b\ \cos.c}{\text{R}}+\frac{\text{sen.}b\ \text{sen.}c\ \cos.\text{A}}{\text{R}^2}$, dev' essere $\text{R}^2\cos.a=\text{R}\cos.b\ \cos.c+\text{sen.}b\ \text{sen.}c\ \cos.\text{A}$; e quindi

$$\text{R}\cos.\text{A}=\frac{\text{R}^3\cos.a-\text{R}^2\cos.b\ \cos.c}{\text{sen.}b\ \text{sen.}c}.$$

Il perchè dev' essere pure

$$R^2 - R\cos.A = R^2 - \frac{R^3\cos.a - R^2\cos.b\cos.c}{\text{sen}.b\ \text{sen}.c}.$$

Ma (§. 52.) $R^2 - R\cos.A$ pareggia $2\ \text{sen}.^2\ \frac{1}{2}A$,

e 'l secondo membro della prec. equazione adegua

$$\frac{R^2\text{sen}.b\,\text{sen}.c - R^3\cos.a + R^2\cos.b\cos.c}{\text{sen}.b\,\text{sen}.c}.$$

ovvero $\frac{R^3\cos.(b-c) - R^3\cos.a}{\text{sen}.b\ \text{sen}.c}$ (§. 51.).

Dunque dev' essere

$$2\text{sen}.^2\frac{1}{2}A = \frac{R^3\cos.(b-c) - R^3\cos.a}{\text{sen}.b\,\text{sen}.c}.$$

Il perchè essendo (§. 54.) $R\cos.(b-c) - R\cos.a = 2\ \text{sen}.\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\text{sen}.\left(\frac{a+c-b}{2}\right)$, dev' essere pure

$$2\text{sen}.^2\frac{1}{2}A = \frac{2R^2\text{sen}.\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\text{sen}.\left(\frac{a+c-b}{2}\right)}{\text{sen}.b\,\text{sen}.c},$$

e $\text{sen}.\frac{1}{2}A = R\sqrt{\left(\frac{\text{sen}.\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\text{sen}.\left(\frac{a+c-b}{2}\right)}{\text{sen}.b\,\text{sen}.c}\right)}$.

C. B. D.

PROP. XIII. TEOR.

§. 125. *In ogni triangolo sferico il seno della metà di un lato pareggia il raggio trigonometrico multiplicato per la radice quadrata del prodotto del coseno della semisomma dei tre angoli preso negativamente pel coseno della semisomma di essi angoli diminuita dell' angolo opposto a quel lato divisa per la radice quadrata del prodotto dei seni degli angoli adjacenti allo stesso.* Cioè dev' essere

$$\text{sen.}\frac{1}{2}a = R\sqrt{\left(\frac{-\cos.\left(\frac{A+B+C}{2}\right)\cos.\left(\frac{B+C-A}{2}\right)}{\text{sen.B sen.C}}\right)}.$$

Dim. Essendo (§. 112.)

$$\cos.A = \frac{\cos.a\ \text{sen.Bsen.C}}{R^2} - \frac{\cos.B\cos.C}{R};$$

sarà $R^2\cos.A = \cos.a\ \text{sen.B sen.C} - R\cos.B\cos.C$,

ed $$R\cos.a = \frac{R^3\cos.A + R^2\cos.B\cos.C}{\text{sen.Bsen.C}}.$$

Il perchè dovrà essere

$$R^2 - R\cos.a = R^2 - \frac{R^3\cos.A + R^2\cos.B\cos.C}{\text{sen.BsenC}}.$$

Ma $R^2 - R\cos.a$ pareggia $2\text{sen.}^2\frac{1}{2}a$ (§. 52.), e 'l secondo membro della precedente equazione adegua

$$\frac{R^2\text{sen.B sen.C} - R^3\cos.A - R^2\cos.B\cos.C}{\text{sen.Bsen.C}},$$

$$\text{cioè}\ \frac{-R^2\cos.(B+C)-R^2\cos.A}{\text{sen}.B\,\text{sen}.C}.$$

Dunque dev' essere

$$2\text{sen}.^2\frac{1}{2}a=\frac{-R^2\cos.(B+C)-R^2\cos.A}{\text{sen}.B\,\text{sen}.C}.$$

E quindi essendo $-R\cos.(B+C)-R\cos.A$ uguale (§. 53.)

$$\text{a}\qquad -2\cos.\left(\frac{B+C+A}{2}\right)\cos.\left(\frac{B+C-A}{2}\right);$$

sarà pure

$$2\text{sen}.^2\frac{1}{2}a=\frac{-2R^2\cos.\left(\frac{B+C+A}{2}\right)\cos.\left(\frac{B+C-A}{2}\right)}{\text{sen}.B\ \text{sen}.C},$$

$$\text{e}\ \text{sen}.\frac{1}{2}a=R\sqrt{\left(\frac{-\cos.\left(\frac{B+C+A}{2}\right)\cos.\left(\frac{B+C-A}{2}\right)}{\text{sen}.B\ \text{sen}.C}\right)}.$$

Ma il coseno della metà della somma de' tre angoli di un triangolo sferico è sempre negativo (§. 123.). Dunque l'è positiva la quantità, ch' è sotto al radicale della precedente equazione. C. B. D.

PROP. XIV. TEOR.

§. 126. *In ogni triangolo sferico la tangente della metà della somma di due angoli adegua la cotangente della metà del terzo angolo multiplicata pel coseno della metà della differenza de' lati, che lo comprendono, di-*

viso pel coseno della semisomma degli stessi lati.

E la tangente della metà della differenza di due angoli di un triangolo sferico pareggia la cotangente della metà del terzo angolo multiplicata pel seno della metà della differenza dei lati, che lo comprendono, diviso pel seno della semisomma degli stessi lati.

Dim. E poichè l' è (§. 106.)

$$\cos.b = \frac{\cos.a\cos.c}{R} + \frac{\text{sen}.a\,\text{sen}.c\cos.B}{R^2},$$

dev' essere pure

$$\text{sen}.a\,\text{sen}.c\cos.B = R^2\cos.b - R\cos.a\cos.c,$$

e $$\text{sen}.a\cos.B = \frac{R^2\cos.b - R\cos.a\cos.c}{\text{sen}.c}.$$

Ma $\cos.a$ pareggia $\dfrac{R\cos.b\cos.c + \text{sen}.b\,\text{sen}.c\cos.A}{R^2}$.

Dunque dev' essere anche

$$\text{sen}.a\cos.B = \frac{R^2\cos.b - \cos.c\left(\dfrac{R\cos.b\cos.c + \text{sen}.b\,\text{sen}.c\cos.A}{R}\right)}{\text{sen}.c},$$

ovvero

$$\text{sen}a\cos.B = \frac{R^3\cos.b - R\cos.b\cos^2 c - \text{sen}.b\,\text{sen}.c\cos.c\cos.A}{R\,\text{sen}.c}.$$

Ma $R^3\cos.b - R\cos.b\cos.^2c$ adegua $R\cos.b\,(R^2 - \cos.^2c)$, ovvero $R\cos.b\,\text{sen}.^2c$. Dunque dev' essere pure

$$\text{sen}.a\cos.B=\frac{R\cos.b\,\text{sen}.c-\text{sen}.b\,\text{sen}.c\cos.c\cos.A}{R\,\text{sen}.c},$$

o sia

$$\text{sen}.a\cos.B=\frac{R\cos.b\,\text{sen}.c-\text{sen}.b\cos.c\cos.A}{R}.$$

Nello stesso modo si potrà dimostrare, che sia

$$\text{sen}.a\cos.C=\frac{R\cos.c\,\text{sen}.b-\text{sen}.c\cos.b\cos.A}{R}.$$

Il perchè sommando il primo membro di quest' ultima equazione col primo membro della precedente, e 'l secondo col secondo, dovrà risultarne

$$\text{sen}.a(\cos.B+\cos.C)=\cos.b\,\text{sen}.c+\cos.c\,\text{sen}.b$$
$$-\frac{\cos.A}{R}(\text{sen}.b\cos.c+\text{sen}.c\cos.b)$$

$$=\left(\frac{R-\cos.A}{R}\right)(\text{sen}.b\cos.c+\text{sen}.c\cos.b),$$

o sia

$$\text{sen}.a(\cos.B+\cos.C)=\left(\frac{R-\cos.A}{R}\right)R\,\text{sen}.(b+c)$$

$$=(R-\cos.A)\text{sen}.(b+c)\ .\ .\ .\ (19).$$

In oltre, essendo (§. 105.)

$\text{sen}.a\,\text{sen}.B=\text{sen}.A\,\text{sen}.b$, e $\text{sen}.a\,\text{sen}C=\text{sen}.A\,\text{sen}.c$;

dovrà essere

$$\text{sen}.a(\text{sen}.B+\text{sen}.C)=\text{sen}.A(\text{sen}.b+\text{sen}.c)\ldots(20):$$

e dividendo il primo membro dell' equazione (20) pel primo dell' equazione (19), e 'l secondo pel secondo, si avrà

$$\frac{\text{sen.B}+\text{sen C}}{\text{cos.B}+\text{cos.C}}=\frac{\text{sen.A}}{\text{R}-\text{cos.A}}\cdot\frac{\text{sen.}b+\text{sen.}c}{\text{sen.}(b+c)}.$$

Ma $\frac{\text{sen.B}+\text{sen.C}}{\text{cos.B}+\text{cos.C}}$ (§. 55.) pareggia $\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}(\text{B}+\text{C})}{\text{R}}$,

$\frac{\text{sen.A}}{\text{R}-\text{cos.A}}$ adegua $\frac{\text{cot.}\frac{1}{2}\text{A}}{\text{R}}$ (§. 53.), e $\frac{\text{sen.}b+\text{sen.}c}{\text{sen.}(b+c)}$,

è uguale a $\frac{\text{cos.}\frac{1}{2}(b-c)}{\text{cos.}\frac{1}{2}(b+c)}$ (§. 56.). Dunque dev' essere

$$\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}(\text{B}+\text{C})}{\text{R}}=\frac{\text{cot.}\frac{1}{2}\text{A}}{\text{R}}\cdot\frac{\text{cos.}\frac{1}{2}(b-c)}{\text{cos.}\frac{1}{2}(b+c)},$$

e $$\text{tang.}\frac{1}{2}(\text{B}+\text{C})=\text{cot.}\frac{1}{2}\text{A}\,\frac{\text{cos.}\frac{1}{2}(b-c)}{\text{cos.}\frac{1}{2}(b+c)}.$$

In oltre, se dal primo membro dell' equazione

$$\text{sen.}a\ \text{sen.B}=\text{sen.A}\ \text{sen.}b$$

sottraggasi il primo membro dell' altra

$$\text{sen.}a\ \text{sen.C}=\text{sen.A}\ \text{sen.}c,$$

e dal secondo il secondo, dovrà risultarne

$$\text{sen.}a\,(\text{sen.B}-\text{sen.C})=\text{sen.A}(\text{sen.}b-\text{sen.}c),$$

e dividendo il primo membro di quest' ultima equazione pel primo membro dell' equazione (19), e 'l secondo pel secondo, si avrà

$$\frac{\text{sen.B}-\text{sen.C}}{\text{cos.B}+\text{cos.C}}=\frac{\text{sen.A}}{\text{R}-\text{cos.A}}\cdot\frac{\text{sen.}b-\text{sen.}c}{\text{sen.}(b+c)}.$$

Ma $\frac{\text{sen.B}-\text{sen.C}}{\text{cos.B}+\text{cos.C}}$ pareggia $\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}(\text{B}-\text{C})}{\text{R}}$ (§. 55),

$\frac{\text{sen.A}}{\text{R}-\text{cos.A}}$ è uguale a $\frac{\text{cot.}\frac{1}{2}\text{A}}{\text{R}}$ (§. 53.),

e $\frac{\text{sen.}b-\text{sen.}c}{\text{sen.}(b+c)}$ adegua $\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(b-c)}{\text{sen.}\frac{1}{2}(b+c)}$ (§. 56.).

Dunque dev' essere

$$\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}(\text{B}-\text{C})}{\text{R}}=\frac{\text{cot.}\frac{1}{2}\text{A}}{\text{R}}\cdot\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(b-c)}{\text{sen.}\frac{1}{2}(b+c)},$$

e quindi

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(\text{B}-\text{C})=\text{cot.}\tfrac{1}{2}\text{A}.\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(b-c)}{\text{sen.}\frac{1}{2}(b+c)}.$$

. . . C. B. D.

§. 127. *Cor. I.* E poichè sono quantità positive cot. $\frac{1}{2}$A e cos. $\frac{1}{2}(b-c)$, ed è tang. $\frac{1}{2}$ (B+C)

$$= \cot. \frac{1}{2} A \frac{\cos. \frac{1}{2}(b-c)}{\cos. \frac{1}{2}(b+c)}$$; l' è chiaro, che $\tang. \frac{1}{2}$ (B+C) debba essere negativa, infinita, o positiva, secondo che la metà della somma dei lati b e c del triangolo sferico sia maggiore, uguale, o minore di 90°. Dunque *la somma di due angoli di un triangolo sferico dev'essere maggiore, uguale, o minore di 180°, secondo che la somma de' lati opposti è maggiore, uguale, o minore di 180°: e viceversa*.

§. 128. *Cor. II.* Il perchè se la somma di due lati di un triangolo sferico sia minore di 180°; l'angolo opposto al minore di essi dovendo essere minore di quello, ch' è opposto al maggior lato (§.116. *Par. II.*); dev' essere sempre acuto. E viceversa, se la somma di due angoli di un triangolo sferico sia minore di 180°; il lato opposto al minore di essi angoli dovendo essere minore di quello, ch' è opposto all' angolo maggiore (§. 116. *Par. I.*), dev' essere sempre minore di 90°.

§. 127. *Cor. III.* In oltre, se la somma di due lati di un triangolo sferico sia maggiore di 180°; l' angolo opposto al maggiore di essi dovendo essere maggiore di quello, ch' è opposto al lato minore (§.116. *Par. II.*), dev'essere sempre ottuso. E viceversa, se la somma di due angoli di un triangolo sferico sia maggiore di 180°; il lato opposto al maggiore di essi dovendo essere maggiore di quello, ch' è opposto all' angolo minore (§.116. *Par. I.*), dev' essere sempre maggiore di 90°.

PROP. XV. TEOR.

§. 130. *La tangente della metà della somma di due lati di un triangolo sferico pareggia la tangente della metà del terzo lato multiplicata pel coseno della semidifferenza degli angoli adjacenti a questo diviso pel coseno della semisomma di questi stessi angoli.*

E la tangente della metà della differenza di due lati di un triangolo sferico pareggia la tangente della metà del terzo lato multiplicata pel seno della semidifferenza degli angoli adjacenti a questo diviso pel seno della semisomma di questi stessi angoli.

Dim. Sieno A', B', C' gli angoli del triangolo supplementale del proposto, ed a', b', c' i lati opposti a tali angoli del medesimo triangolo supplementale. Dovrà essere per la Prop. prec.

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(B'+C') = \text{cot.}\tfrac{1}{2}A'.\frac{\text{cos.}\frac{1}{2}(b'-c')}{\text{cos.}\frac{1}{2}(b'+c')} \quad (20)$$

$$\text{e tang.}\tfrac{1}{2}(B'-C') = \text{cot.}\tfrac{1}{2}A'.\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(b'-c')}{\text{sen.}\frac{1}{2}(b'+c')} \quad (21).$$

Ma l'è $\frac{B'+C'}{2} = \frac{180^\circ - b + 180^\circ - c}{2} = 180^\circ$

$-\frac{b+c}{2}$ (§. 97.), $\frac{B'-C'}{2} = \frac{180^\circ - b - 180^\circ + c}{2}$

$= \frac{c-b}{2}$, $\frac{1}{2}$ $A' = 90° - \frac{a}{2}$, $\frac{1}{2}(b'-c') = \frac{1}{2}(C-B)$,

$\frac{1}{2}(b'+c') = 180° - \frac{B+C}{2}$. Dunque dev' essere

$\text{tang.}\frac{1}{2}(B'+C') = -\text{tang.}\frac{1}{2}(b+c)$, $\text{tang.}\frac{1}{2}(B'-C') = -\text{tang.}\frac{1}{2}(b-c)$, $\cot.\frac{1}{2}A' = \text{tang.}\frac{1}{2}a$, $\cos.\frac{1}{2}(b'-c') = \cos.\frac{1}{2}(B-C)$, $\cos.\frac{1}{2}(b'+c') = -\cos.\frac{1}{2}(B+C)$, $\text{sen.}\frac{1}{2}(b'-c') = -\text{sen.}\frac{1}{2}(B-C)$, e $\text{sen.}\frac{1}{2}(b'+c') = \text{sen.}\frac{1}{2}(B+C)$. Il perchè se facciansi queste sostituzioni nelle due equazioni (20) e (21), e ciascuna di quelle equazioni, che ne risultano, si multiplichi per -1; dovrà risultarne

$$\text{tang.}\frac{1}{2}(b+c) = \text{tang.}\frac{1}{2}a.\frac{\cos.\frac{1}{2}(B-C)}{\cos.\frac{1}{2}(B+C)},$$

$$\text{e tang.}\frac{1}{2}(b-c) = \text{tang.}\frac{1}{2}a.\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(B-C)}{\text{sen.}\frac{1}{2}(B+C)}. \; . \; . \; \text{C.B.D.}$$

CAP. V.

DELLA RISOLUZIONE DE' TRIANGOLI SFERICI.

PROP. XVI. PROBL.

131. *Di un triangolo sferico rettangolo, oltre all' angolo retto, diensi due parti; determinare le rimanenti parti di esso.*

Sol. Cas. I. Sia (*fig.* 14.) ABC un triangolo sferico rettangolo in A, e di esso, oltre all' angolo retto A, suppongasi primieramente, che sieno dati i lati b e c; determinare il lato a e gli angoli B e C.

Prendendo il complemento del lato a per parte media; i lati b e c saranno le parti estreme opposte, ed il lato a si avrà dall' equazione (§. 120.)

$$\cos.a = \frac{\cos.b \cos.c}{R}.$$

Che se il lato b si prenda per parte media; il complemento dell' angolo C ed il lato c debbono essere le parti adjacenti. E quindi si ha (§. 120.)

$$\text{sen}.b = \frac{\cot.C \ \text{tang}.c}{R}.$$

Ma cot.C pareggia $\frac{R^2}{\text{tang}.C}$. Dunque dev' essere pure

$$\text{sen}.b = \frac{R \text{tang}.c}{\text{tang}.C}.$$

Il perchè l' angolo C si avrà dall' equazione

$$\text{tang.C} = \frac{\text{R tang.}c}{\text{sen.}b},$$

che traesi dalla precedente.

Nello stesso modo si potrà rilevare, che l' angolo B si ottenga dall' equazione

$$\text{tang.B} = \frac{\text{Rtang.}b}{\text{sen.}c}.$$

Cas. II. Suppongasi in secondo luogo, che sieno dati il lato a, ch' è opposto all' angolo retto A, ed il lato b. Si avrà pure (*Cas. I.*).

$$\text{cos.}a = \frac{\text{cos.}b\,\text{cos.}c}{\text{R}};$$

e quindi il lato c si otterrà dall' equazione

$$\text{cos.}c = \frac{\text{Rcos.}a}{\text{cos.}b},$$

che traesi dalla precedente.

E prendendo il complemento dell' angolo C per parte media; il lato b e 'l complemento del lato a saranno le parti adjacenti. E perciò l' angolo C si avrà per mezzo dell' equazione (§. 120.)

$$\text{cos.C} = \frac{\text{tang.}b\,\text{cot.}a}{\text{R}}.$$

Che se prendasi il lato b per parte media; dovranno essere il complemento del lato a e 'l complemento dell' angolo B le parti estreme opposte. Il perchè dovrà essere

$$\text{sen.}b = \frac{\text{sen.}a\ \text{sen.B}}{\text{R}},$$

e l' angolo B, ch' è sempre della stessa specie del lato b (§. 121.), si avrà dall' equazione

$$\text{sen.B} = \frac{\text{Rsen.}b}{\text{sen.}a}.$$

Cas. III. Diansi in terzo luogo il lato a e l' angolo B. Egli è chiaro, che prendendo il complemento del lato a per parte media, debbono essere i complementi degli angoli B e C le parti adjacenti: e prendendo il complemento dell' angolo B per parte media; debbono essere il lato c e 'l complemento del lato a le parti adjacenti. Il perchè dovrà essere

$$\cos.a = \frac{\text{cot.B cot.C}}{\text{R}}, \text{ e } \cos.\text{B} = \frac{\text{cot.}a\ \text{tang.}c}{\text{R}},$$

o sia $\cos.a = \frac{\text{Rcot.B}}{\text{tang.C}}$, e $\cos.\text{B} = \frac{\text{R tang.}c}{\text{tang.}a}$.

E perciò l' angolo C ed il lato c resteranno determinati dall' equazioni

$$\text{tang.C} = \frac{\text{Rcot.B}}{\cos.a}, \text{ e } \text{tang.}c = \frac{\cos.\text{B tang.}a}{\text{R}},$$

che traggonsi dalle due precedenti.

E prendendo il lato b per parte media, si avrà

$$\text{sen.}b = \frac{\text{sen.}a\ \text{sen.B}}{\text{R}};$$

dalla quale equazione si otterrà il lato b, che

sarà sempre dell' istessa specie dell' angolo B (§. 121.).

Cas. IV. Suppongasi, che sieno dati l'angolo B ed il lato c, che gli è adjacente. Sarà chiaro, che se prendasi il complemento dell'angolo B per parte media, debba essere

$$\cos.B = \frac{\cot.a \tang.c}{R};$$

e quindi $$\tang.a = \frac{R \tang.c}{\cos.B};$$

dalla quale equazione si avrà il lato a.

Che se prendasi il lato c per parte media; saranno il lato b e 'l complemento dell' angolo B le parti adjacenti. Onde dovrà essere

$$\sen.c = \frac{\cot.B \tang.b}{R} = \frac{R \tang.b}{\tang.B};$$

e quindi $\tang.b = \frac{\sen.c \tang.B}{R}$.

La quale equazione darà il valore del lato b, che sarà sempre della stessa specie dell' angolo B.

E se finalmente si prenda l' angolo C per parte media; il lato c e 'l complemento dell' angolo B saranno le parti estreme opposte. E quindi l' angolo C si avrà dall' equazione

$$\cos.C = \frac{\cos.c \sen.B}{R}.$$

Cas. V. Diansi l' angolo B ed il lato b, che gli è opposto. Egli è chiaro, che prolungando i lati BC, BA fino a che s' incontrino

nel punto diametralmente opposto all'altro B; dal lato CA e dai prolungamenti di quegli altri due debba costituirsi un triangolo, i cui dati saranno quegli stessi del triangolo ABC; cioè il lato b e l'angolo B. Onde in tal caso cogli stessi dati non potrà conoscersi se debbasi risolvere il triangolo ABC, o l'altro ottenuto nel modo già detto, a meno che le circostanze del Problema non tolgano l'incertezza. Intanto supponendo, che dalle circostanze del Problema si sappia, che il lato BA debba essere minore o pur maggiore del quadrante, prendendo l'angolo B per parte media; si avrà

$$\cos.B = \frac{\text{sen}.C \cos.b}{R},$$

e l'angolo C, ch'è sempre della stessa specie del lato BA, o sia di c, ne sarà determinato dall'equazione

$$\text{sen}.C = \frac{R\cos.B}{\cos.b}.$$

E prendendo il lato c per parte media, si avrà il valore di esso per mezzo dell'equazione

$$\text{sen}.c = \frac{\text{tang}.b \cot.B}{R}.$$

Che se prendasi il lato b per parte media, si otterrà

$$\text{sen}.b = \frac{\text{sen}.B \, \text{sen}.a}{R},$$

e 'l lato a, il cui coseno è sempre dello stesso

segno del prodotto de' coseni degli archi b e c, sarà determinato dall' equazione

$$\text{sen.}a = \frac{\text{R sen.}b}{\text{sen.B}}.$$

Cas. VI. Suppongasi finalmente, che oltre all' angolo retto A sieno dati i due angoli B e C. Per determinare il lato a, si dovrà assumere questo per parte media, e 'l suo valore si potrà determinare dall' equazione

$$\cos.a = \frac{\text{cot.B cot.C}}{\text{R}}.$$

Ma prendendo il complemento dell' angolo B per parte media, si ha

$$\cos.\text{B} = \frac{\text{sen.C} \cos.b}{\text{R}},$$

e prendendo il complemento dell' angolo C per parte media, si ha

$$\cos.\text{C} = \frac{\text{sen.B}\cos.c}{\text{R}}.$$

Dunque dev' essere

$$\cos.b = \frac{\text{R} \cos.\text{B}}{\text{sen.C}}, \text{ e } \cos.c = \frac{\text{R}\cos.\text{C}}{\text{sen.B}}.$$

Dalle quali equazioni si ottengono i valori dei lati b e c. C. B. F.

PROP. XVII. PROBL.

§. 132. *Diansi tre parti di un triangolo sferico obliquangolo; determinare le altre tre.*

Sol. Cas. I. Sieno dati in primo luogo i lati a, b, c del triangolo sferico A, B, C. Si avrà (§. 124.).

$$\text{sen.}\frac{1}{2}\,A = R\sqrt{\left(\frac{\text{sen.}\left(\frac{a+b-c}{2}\right)\text{sen.}\left(\frac{a+c-b}{2}\right)}{\text{sen.}b\ \text{sen.}c}\right)}.$$

Dalla quale equazione si otterrà il valore di $\frac{1}{2}$ A, e quindi quello dell' angolo A. Nello stesso modo si potranno determinare gli angoli B, e C. Ma questi quando si è determinato l' angolo A, si possono determinare per mezzo delle seguenti analogie; cioè (§. 104.)

$$\text{sen.}a:\text{sen.}b::\text{sen.A}:\text{sen.B}$$

e $\quad \text{sen.}a:\text{sen.}c::\text{sen.A}:\text{sen.C}.$

Cas. II. Diansi in secondo luogo gli angoli A, B, e C del triangolo sferico ABC. Dovrà essere (§. 125.)

$$\text{sen.}\frac{1}{2}\,a = R\sqrt{\left(\frac{-\cos.\left(\frac{B+C+A}{2}\right)\cos.\left(\frac{B+C-A}{2}\right)}{\text{sen.B}\ \text{sen.C}}\right)},$$

e da questa equazione si avrà il valore di $\frac{1}{2}a$, il cui duplo sarà il lato a opposto all' angolo A. Nello stesso modo si otterranno i lati b, e c, i quali, quando si è determinato il lato a, si possono ottenere dalle seguenti analogie, cioè

$$\text{sen.A}:\text{sen.B}::\text{sen.}a:\text{sen.}b\,,$$

e $\quad \text{sen.A}:\text{sen.C}::\text{sen.}a:\text{sen.}c.$

Cas. III. Suppongasi in terzo luogo, che sieno dati i lati b, e c, e l' angolo A da essi compreso. Dovrà essere (§. 126.)

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(B+C)=\text{cot.}\tfrac{1}{2}A.\frac{\cos.\frac{1}{2}(b-c)}{\cos.\frac{1}{2}(b+c)},$$

$$\text{e tang.}\tfrac{1}{2}(B-C)=\text{cot.}\tfrac{1}{2}A.\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(b-c)}{\text{sen.}\frac{1}{2}(b+c)}.$$

Onde se da queste due equazioni si determinino gli angoli $\frac{1}{2}$ (B+C) ed $\frac{1}{2}$(B—C); la somma di questi sarà l' angolo B, che dovrà essere opposto al lato b, e la differenza dei medesimi dovrà essere l' angolo C opposto al lato c. Il lato a poi si potrà determinare per mezzo dell' equazione (§. 106.)

$$\cos.a=\frac{\cos.b\cos.c}{R}+\frac{\text{sen.}b\ \text{sen.}c\ \cos.A}{R^2},$$

o per mezzo di una delle seguenti

$$\text{sen.}a=\frac{\text{sen.}b\ \text{sen.}A}{\text{sen.}B},\ \text{e sen.}a=\frac{\text{sen.}c\text{sen.}A}{\text{sen.}C}.$$

Cas. IV. In quarto luogo diansi gli angoli B e C, ed il lato a, che gli è adjacente. Si avranno i lati b e c per mezzo dell' equazioni (§. 130.).

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}(b+c)=\text{tang.}\tfrac{1}{2}a.\frac{\cos.\frac{1}{2}(B-C)}{\cos.\frac{1}{2}(B+C)},$$

e $\text{tang.}\frac{1}{2}(b-c)=\text{tang.}\frac{1}{2}a.\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(B-C)}{\text{sen.}\frac{1}{2}(B+C)}$,

e l'angolo A si otterrà dalla seguente (§. 112.)

$$\cos.A=\frac{\text{sen.B sen.C cos.}a}{R}-\frac{\cos.B\cos.C}{R},$$

o da una di queste (§. 105.)

$$\text{sen.A}=\frac{\text{sen.}a\,\text{sen.B}}{\text{sen.}b},\ \text{e sen.A}=\frac{\text{sen.}a\ \text{sen.C}}{\text{sen.}c}.$$

Cas. V. Suppongasi in quinto luogo, che sieno dati i lati b, e c, e l' angolo B opposto al primo di essi. Dovrà essere (§. 104.)

$$\text{sen.C}=\frac{\text{sen.}c\ \text{sen.B}}{\text{sen.}b};$$

dalla quale equazione si avrà l' angolo C; il quale sarà acuto, se sottenda il minor lato, e la somma dei lati b e c sia minore di 180° (§. 128.), e sarà ottuso, se sottenda il lato maggiore, e la somma de' lati b e c sia maggiore di 180° (§. 129.). In ogni altro caso la specie dell' angolo C sarà dubbia. Or conoscendo la specie dell' angolo C, si potrà determinare il rimanente lato a da una delle due seguenti equazioni

$$\text{tang.}\frac{1}{2}(b+c)=\text{tang.}\frac{1}{2}a\ \frac{\cos.\frac{1}{2}(B-C)}{\cos.\frac{1}{2}(B+C)},$$

$$\text{e tang.}\tfrac{1}{2}(b-c)=\text{tang.}\tfrac{1}{2}\,a\,\frac{\text{sen.}\frac{1}{2}(B-C)}{\text{sen.}\frac{1}{2}(B+C)};$$

dalla prima delle quali si ottiene

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}\,a=\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}(b+c)\cos.\frac{1}{2}(B+C)}{\cos.\frac{1}{2}(B-C)},$$

e dalla seconda si ha

$$\text{tang.}\tfrac{1}{2}a=\frac{\text{tang.}\frac{1}{2}(b-c)\text{sen.}\frac{1}{2}(B+C)}{\text{sen.}\frac{1}{2}(B-C)}:$$

e da ciascuna di queste due ultime equazioni si potrà determinare il valore di $\frac{1}{2}a$, il cui duplo sarà quello del lato a. Il terzo angolo A si determinerà poi per mezzo dell' equazione

$$\text{sen.A}=\frac{\text{sen.}a\ \text{sen.B}}{\text{sen.}b}.$$

Cas. VI. Diansi finalmente gli angoli B, C, ed il lato b opposto al primo di detti angoli. Il lato c, ch' è opposto al secondo degli angoli dati, si avrà dall' equazione

$$\text{sen.}c=\frac{\text{sen.}b\ \text{sen.C}}{\text{sen.B}}:$$

ed esso lato sarà minore di 90°, se gli angoli B e C insieme presi sieno minori di due retti, e l' angolo C sia minore dell' altro B (§. 128.): e

sarà maggiore di 90° se gli angoli B e C insieme presi sieno maggiori di due retti, e l' angolo C sia maggiore dell' altro B (§. 129.). In ogni altro caso la specie del triangolo sarà dubbia. Ma conoscendosi il lato c, si potrà determinare il lato a per mezzo di una delle seguenti equazioni, cioè

$$\tan.\tfrac{1}{2}\,a = \frac{\tan.\tfrac{1}{2}(b+c)\cos.\tfrac{1}{2}\,(B+C)}{\cos.\tfrac{1}{2}(B-C)},$$

e $$\tan.\tfrac{1}{2}a = \frac{\tan.\tfrac{1}{2}(b-c)\text{sen}.\tfrac{1}{2}(B+C)}{\text{sen}.\tfrac{1}{2}(B-C)}.$$

L' angolo A poi si avrà dall' equazione

$$\text{sen}.A = \frac{\text{sen}.a\ \text{sen}.B}{\text{sen}.b} \ldots$$ C. B. F.

FINE.

Unica
fig. 6.
E
M
B
F
G
D
H
A L
O
N
K
C
fig. 10.
A
B
F
E
G
C
D
B
A
D
fig. 14.
C
a
G
F
B
H
E
D
A
c